<u>Aufgabe 12.1.</u>

Finden Sie die folgenden Ableitungen:

<u>Aufgabe 12.1.1.</u>

$f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ für die Funktion $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3, x \in R$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
a &= (x-2)^2 \\
a' &= 2(x-2) \\
&= 2x-4 \\
b &= (x-3)^3 \\
b' &= 3(x-3)^2 \\
c &= ab \\
c' &= a'b + ab' \\
&= (2x-4)(x-3)^3 + (x-2)^2 3(x-3)^2 \\
&= (x-3)^2 \left((2x-4)(x-3) + 3(x-2)^2\right) \\
&= (x-3)^2 \left(2x^2 - 4x - 6x + 12 + 3x^2 - 12x + 12\right) \\
&= (x-3)^2 \left(5x^2 - 22x + 24\right) \\
f(x) &= (x-1)ab \\
&= (x-1)c \\
&= cx - c \\
f'(x) &= (x-3)^2 \left(5x^2 - 22x + 24\right)x + (x-2)^2 (x-3)^3 - (x-3)^2 \left(5x^2 - 22x + 24\right) \\
&= (x-3)^2 \left(5x^2 - 22x + 24\right)(x-1) + (x-2)^2 (x-3)^3 \\
f'(1) &= 0 + (-2)^3 \\
&= -8 \\
f'(2) &= 0 \\
f'(3) &= 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12.1.2.

$f'(2)$ für die Funktion $f(x) = x^2 \sin(x-2), x \in R$

Lösung:

$$z = \sin(x-2)$$
$$z' = \cos(x-2)$$
$$f(x) = x^2 z$$
$$f'(x) = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2)$$
$$f'(2) = 4\sin 0 + 4\cos 0$$
$$= 4$$

Aufgabe 12.2.

Bestimmen Sie die Ableitungen nach *x* der folgenden Funktionen:

Aufgabe 12.2.1.

$$f(x) = a^5 + 5a^3x^2 - x^5, a, x \in R$$

Lösung:

$$f'(x) = 10a^3x - 5x^4$$

Aufgabe 12.2.2.

$$f(x) = \frac{ax+b}{a+b}, a, b, x \in R$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{a}{a+b}x + \frac{b}{a+b}$$
$$f'(x) = \frac{a}{a+b}$$

Aufgabe 12.2.3.

$$f(x) = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha), \alpha, x \in R$$

Lösung:

$$f'(x) = (x\sin\alpha + \cos\alpha)'(x\cos\alpha - \sin\alpha) + (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)'$$
$$= (x\sin\alpha)'(x\cos\alpha - \sin\alpha) + (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha)'$$
$$= \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha) + (x\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha$$
$$= x\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha + x\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$$
$$= 2x\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$$

Aufgabe 12.2.4.

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, x \geq 0$$

Lösung:

$$f(x) = \left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \left(u^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right)$$

Aufgabe 12.2.5.

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x, x \in R$$

Lösung:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$\left(\tan^3 x\right)' = 3\tan^2 x\left(1 + \tan^2 x\right)$$

$$\left(\tan^5 x\right)' = 5\tan^4 x\left(1 + \tan^2 x\right)$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - \frac{1}{3} 3\tan^2 x\left(1 + \tan^2 x\right) + \frac{1}{5} 5\tan^4 x\left(1 + \tan^2 x\right)$$

$$= 1 + \tan^2 x - \tan^2 x - \tan^4 x + \tan^4 x + \tan^2 x + \tan^6 x$$

$$= 1 + \tan^6 x$$

<u>Aufgabe 12.2.6.</u>

$$f(x) = e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right), x \in R$$

Lösung:

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \left(e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right)\right)'$$

$$z = \frac{x}{2}$$

$$= e^x\left(1+\cot\frac{x}{2}\right) + e^x\left(-\frac{1}{\sin^2 z}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= e^x\left(1+\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$= e^x\,\frac{2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} - 1}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= e^x\,\frac{\sin x - \cos x}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

Aufgabe 12.2.7.

$$f(x) = \ln(\ln(\ln x)), x \geq 0$$

Lösung:

$$(\ln x)' = \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h}$$

$$= \frac{\ln \frac{x_0 + h}{x_0}}{\frac{h \cdot x_0}{x_0}}$$

$$= \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0} \cdot x_0} \left(und \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1\right)$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = (\ln(\ln(\ln x)))'$$

$$a = \ln(\ln x)$$

$$a' = \frac{1}{x \ln x}$$

$$f'(x) = (\ln a)'$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x \ln x}$$

$$= \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

Aufgabe 12.2.8.

$$f(x) = e^x + e^{(e^x)} + e^{(ee^x)}, x \in R$$

Lösung:

$$f'(x) = e^x + e^{(e^x)} e^x + \left(e^{ee^x}\right)'$$

$$z = z' = ee^x$$

$$f'(x) = e^x + e^{(e^x)} e^x + e^{(ee^x)} ee^x$$

$$= e^x \left(1 + e^{(e^x)} + ee^{(ee^x)}\right)$$

Aufgabe 12.3.

Es sei $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le x_0 \\ ax+b, & x > x_0 \end{cases}, a, b \in R$. Wie müssen die Koeffizienten *a* und *b* gewählt werden, damit die Funktion *f* in x_0 differenzierbar ist ?

Lösung:

Die Ableitung ergibt sich als $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \le x_0 \\ a & x > x_0 \end{cases}$. Zur Differenzierbarkeit in x_0 muss $a=2x_0$ sein. Die Stetigkeit bedingt weiter, dass $ax+b = 2x_0 x + b$ an der Stelle x_0 die Gleichung $x^2 = 2x_0 x + b$ erfüllt:

$$x_0^2 = 2x_0 x_0 + b$$

$$x_0^2 = 2x_0^2 + b$$

$$-x_0^2 = b$$

$$a = 2x_0$$

Aufgabe 12.4.

Ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \ln(1+x), & x \ge 0 \end{cases}$ differenzierbar für jedes $x \in R$?

Lösung:

Es ist $f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x}, & x \ge 0 \end{cases}$. Der kritische Punkt ist das Verhalten bei $x_0=0$. Linksseitig ist $\lim\limits_{x \to 0-} 1 = 1$, rechtsseitig gilt $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{1+x} = 1$. Da ebenso Stetigkeit von *x* und ln(1+*x*) vorliegt, ist die Funktion für alle reellen Zahlen differenzierbar.

Aufgabe 12.5.

Man bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

Aufgabe 12.5.1.

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\left(1-x^2\right) - 2x(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} \\ &= \frac{2-2x^2+4x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \\ &= \frac{2+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2} \\ &= \frac{2\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.2.

$$f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-2x)\left(1-x+x^2\right) - \left(1+x-x^2\right)(-1+2x)}{\left(1-x+x^2\right)^2} \\ &= \frac{1-x+x^2-2x+2x^2-2x^3-\left(-1+2x-x+2x^2+x^2-2x^3\right)}{\left(1-x+x^2\right)^2} \\ &= \frac{-4x+2}{\left(1-x+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.3.

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z &= (1-x)^2(1+x)^3 \\
&= \left(1-x^2\right)^2(1+x) \\
&= \left(1-2x^2+x^4\right)(1+x) \\
&= 1+x-2x^2-2x^3+x^4+x^5 \\
z' &= 1-4x-6x^2+4x^3+5x^4
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{z}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{z-xz'}{z} \\
&= \frac{1+x-2x^2-2x^3+x^4+x^5-x\left(1-4x-6x^2+4x^3+5x^4\right)}{(1-x)^4(1+x)^6} \\
&= \frac{1+2x^2+4x^3-3x^4-4x^5}{(1-x)^4(1+x)^6}
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 12.5.4.</u>

$$f(x)=\frac{\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)}{(1-x)^2}$$

Lösung:

$$a=2-x^2$$
$$a'=-2x$$
$$b=3-x^3$$
$$b'=-3x^2$$
$$c=(1-x)^2$$
$$c'=-2(1-x)=2x-2$$

$$f'(x)=\left(\frac{ab}{c}\right)'=\frac{(ab)'c-abc'}{c^2}=\frac{(a'b+ab')c-abc'}{c^2}=\frac{a'bc+ab'c-abc'}{c^2}$$
$$=\frac{-2x\left(3-x^3\right)(1-x)^2-3x^2\left(2-x^2\right)(1-x)^2-\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)2(x-1)}{(1-x)^4}$$
$$=\frac{-2x\left(3-x^3\right)(1-x)-3x^2\left(2-x^2\right)(1-x)+2\left(2-x^2\right)\left(3-x^3\right)}{(1-x)^3}$$
$$=\frac{2\left(3-x^3\right)\left\{\left(2-x^2\right)-x(1-x)\right\}-3x^2\left(2-x^2\right)(1-x)}{(1-x)^3}$$
$$=\frac{2\left(3-x^3\right)(2-x)-3x^2\left(2-x^2\right)(1-x)}{(1-x)^3}$$

<u>Aufgabe 12.5.5.</u>

$$f(x)=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^p},\ p\in R$$

Lösung:

$$f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^p$$
$$f'(x)=p\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{p-1}\left(\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\right)$$
$$=\frac{2p}{(1+x)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{p-1}$$

Aufgabe 12.5.6.

$$f(x) = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{2+x^3}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{2+x^3} \\
&= (1+x)\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(2+x^3\right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= 1+x \\
a' &= 1 \\
b &= \left(2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
b' &= \frac{1}{2}\left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x = x\left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
c &= \left(2+x^3\right)^{\frac{1}{3}} \\
c' &= \frac{1}{3}\left(2+x^3\right)^{-\frac{2}{3}}3x^2 = x^2\left(2+x^3\right)^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (ab)'c + abc' \\
&= (a'b + ab')c + abc' \\
&= a'bc + ab'c + abc' \\
&= \left(2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(2+x^3\right)^{\frac{1}{3}} + (1+x)x\left(2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2+x^3\right)^{\frac{1}{3}} + (1+x)\left(2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}x^2\left(2+x^3\right)^{-\frac{2}{3}} \\
&= \sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{2+x^3} + \frac{x(1+x)\sqrt[3]{2+x^3}}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{x^2(1+x)\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{\left(2+x^3\right)^2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.7.

$$f(x) = \sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}$$

Lösung:

$$a = (1-x)^m$$
$$a' = -m(1-x)^{m-1}$$
$$b = (1+x)^n$$
$$b' = n(1+x)^{n-1}$$

$$f(x) = \sqrt[m+n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{m+n}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{m+n}\left((1-x)^m (1+x)^n\right)^{\frac{1}{m+n}-1} \cdot \left(-m(1-x)^{m-1}(1+x)^n + (1-x)^m n(1+x)^{n-1}\right)$$
$$= \frac{1}{m+n} \cdot \frac{\sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}}{(1-x)^m (1+x)^n} \cdot (1-x)^m (1+x)^n \left(\frac{n}{1+x} - \frac{m}{1-x}\right)$$
$$= \frac{1}{m+n} \cdot \left(\frac{n}{1+x} - \frac{m}{1-x}\right) \cdot \sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}$$

Aufgabe 12.5.8.

$$f(x) = \sin^n x \cdot \cos nx, n \in N$$

Lösung:

$$a = \sin^n x$$
$$a' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x$$
$$b = \cos nx$$
$$b' = -n \sin nx$$

$$f'(x) = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \cdot \cos nx + \sin^n x \cdot (-n \sin nx)$$
$$= n \sin^{n-1} x \cdot (\cos x \cdot \cos nx - \sin nx \cdot \sin x)$$
$$= n \sin^{n-1} x \cdot \cos(n+1)x$$

Aufgabe 12.5.9.

$$f(x) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

Lösung:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$a = \frac{x}{2}$$

$$b = \tan a$$

$$b' = (1 + \tan^2 a)a'$$

$$= \left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \ln b$$

$$f'(x) = \frac{b'}{b}$$

$$= \frac{\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 + \tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sin x}$$