

Aufgabe 12.1.

Finden Sie die folgenden Ableitungen:

Aufgabe 12.1.1. $f'(1), f'(2), f'(3)$ für die Funktion $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3, x \in \mathbb{R}$ *Lösung:*

$$a = (x-2)^2$$

$$a' = 2(x-2)$$

$$= 2x - 4$$

$$b = (x-3)^3$$

$$b' = 3(x-3)^2$$

$$c = ab$$

$$c' = a'b + ab'$$

$$= (2x-4)(x-3)^3 + (x-2)^2 3(x-3)^2$$

$$= (x-3)^2 \left((2x-4)(x-3) + 3(x-2)^2 \right)$$

$$= (x-3)^2 (2x^2 - 4x - 6x + 12 + 3x^2 - 12x + 12)$$

$$= (x-3)^2 (5x^2 - 22x + 24)$$

$$f(x) = (x-1)ab$$

$$= (x-1)c$$

$$= cx - c$$

$$f'(x) = (x-3)^2 (5x^2 - 22x + 24)x + (x-2)^2 (x-3)^3 - (x-3)^2 (5x^2 - 22x + 24)$$

$$= (x-3)^2 (5x^2 - 22x + 24)(x-1) + (x-2)^2 (x-3)^3$$

$$f'(1) = 0 + (-2)^3$$

$$= -8$$

$$f'(2) = 0$$

$$f'(3) = 0$$

Aufgabe 12.1.2.

$f'(2)$ für die Funktion $f(x) = x^2 \sin(x-2), x \in \mathbb{R}$

Lösung:

$$z = \sin(x-2)$$

$$z' = \cos(x-2)$$

$$f(x) = x^2 z$$

$$f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2)$$

$$f'(2) = 4 \sin 0 + 4 \cos 0$$

$$= 4$$

Aufgabe 12.2.

Bestimmen Sie die Ableitungen nach x der folgenden Funktionen:

Aufgabe 12.2.1.

$$f(x) = a^5 + 5a^3 x^2 - x^5, a, x \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$f'(x) = 10a^3 x - 5x^4$$

Aufgabe 12.2.2.

$$f(x) = \frac{ax+b}{a+b}, a, b, x \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$f(x) = \frac{a}{a+b} x + \frac{b}{a+b}$$

$$f'(x) = \frac{a}{a+b}$$

Aufgabe 12.2.3.

$$f(x) = (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha), \alpha, x \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \sin \alpha + \cos \alpha)'(x \cos \alpha - \sin \alpha) + (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha - \sin \alpha)' \\ &= (x \sin \alpha)'(x \cos \alpha - \sin \alpha) + (x \sin \alpha + \cos \alpha)(x \cos \alpha)' \\ &= \sin \alpha(x \cos \alpha - \sin \alpha) + (x \sin \alpha + \cos \alpha) \cos \alpha \\ &= x \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha + x \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= 2x \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

Aufgabe 12.2.4.

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, x \geq 0$$

Lösung:

$$f(x) = \left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\sqrt{u})' = \left(u^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2 \left(x + \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \left(x + x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right)$$

Aufgabe 12.2.5.

$$f(x) = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x, x \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$(\tan^2 x)' = \tan x \cdot \tan x$$

$$= (1 + \tan^2 x) \tan x + \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$= 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$(\tan^3 x)' = (\tan x \cdot \tan^2 x)$$

$$= (1 + \tan^2 x) \tan^2 x + \tan x \cdot 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$= (1 + \tan^2 x) \tan^2 x + 2 \tan^2 x (1 + \tan^2 x)$$

$$= 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x)$$

$$(\tan^5 x)' = (\tan^3 x \cdot \tan^2 x)$$

$$= 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \cdot \tan^2 x + \tan^3 x \cdot 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

$$= 5 \tan^4 x (1 + \tan^2 x)$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x - \tan^2 x (1 + \tan^2 x) + \tan^4 x (1 + \tan^2 x)$$

$$= (1 - \tan^2 x + \tan^4 x) (1 + \tan^2 x)$$

Aufgabe 12.2.6.

$$f(x) = e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} \right), x \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \left(e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} \right) \right)'$$

$$z = \frac{x}{2}$$

$$= e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} \right) + e^x \left(-\frac{1}{\sin^2 z} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$= e^x \left(1 + \cot \frac{x}{2} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right)$$

Aufgabe 12.2.7.

$$f(x) = \ln(\ln(\ln x)), x \geq 0$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} \\ &= \frac{\ln \frac{x_0 + h}{x_0}}{\frac{h \cdot x_0}{x_0}} \\ &= \frac{\ln \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0} \cdot x_0} \quad (\text{und } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1) \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = (\ln(\ln(\ln x)))'$$

$$a = \ln(\ln x)$$

$$a' = \frac{1}{x \ln x}$$

$$f'(x) = (\ln a)'$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x \ln x}$$

$$= \frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

Aufgabe 12.2.8.

$$f(x) = e^x + e^{(e^x)} + e^{(ee^x)}, x \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$f'(x) = e^x + e^{(e^x)} e^x + (e^{ee^x})'$$

$$z = ee^x$$

$$z' = e^x + ee^x$$

$$f'(x) = e^x + e^{(e^x)} e^x + e^z z'$$

$$= e^x + e^{(e^x)} e^x + e^{ee^x} (e^x + ee^x)$$

$$= e^x (1 + e^{(e^x)} + e^{ee^x} + e^{ee^x+1})$$

Aufgabe 12.3.

Es sei $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0 \\ ax + b, & x > x_0 \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}$. Wie müssen die Koeffizienten a und b gewählt werden, damit die Funktion f in x_0 differenzierbar ist?

Lösung:

Die Ableitung ergibt sich als $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq x_0 \\ a & x > x_0 \end{cases}$. Zur Differenzierbarkeit in x_0 muss $a=2x_0$ sein. Die

Stetigkeit bedingt weiter, dass $ax + b = 2x_0x + b$ an der Stelle x_0 die Gleichung $x^2 = 2x_0x + b$ erfüllt:

$$x_0^2 = 2x_0x_0 + b$$

$$x_0^2 = 2x_0^2 + b$$

$$-x_0^2 = b$$

$$a = 2x_0$$

Aufgabe 12.4.

Ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ \ln(1+x), & x \geq 0 \end{cases}$ differenzierbar für jedes $x \in \mathbb{R}$?

Lösung:

Es ist $f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$. Der kritische Punkt ist das Verhalten bei $x_0=0$. Linksseitig ist $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$,

rechtsseitig gilt $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$. Da ebenso Stetigkeit von x und $\ln(1+x)$ vorliegt, ist die Funktion für alle reellen

Zahlen differenzierbar.

Aufgabe 12.5.

Man bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

Aufgabe 12.5.1.

$$f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(1-x^2) - 2x(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2 + 2x^2}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.2.

$$f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (1+x-x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} \\ &= \frac{1-x+x^2 - 2x+2x^2 - 2x^3 - (-1+2x-x+2x^2+x^2-2x^3)}{(1-x+x^2)^2} \\ &= \frac{-4x+2}{(1-x+x^2)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.3.

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} z &= (1-x)^2(1+x)^3 \\ &= (1-x^2)^2(1+x) \\ &= (1-2x^2+x^4)(1+x) \\ z' &= (-4x+4x^3)(1+x) + (1-2x^2+x^4) \\ &= -4x+4x^3-4x^2+4x^4+1-2x^2+x^4 \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{x}{z}$$

$$f'(x) = \frac{1}{z} \cdot z'$$

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$$

Aufgabe 12.5.4.

$$f(x) = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$$

Lösung:

$$a = 2 - x^2$$

$$a' = -2x$$

$$b = 3 - x^3$$

$$b' = -3x^2$$

$$c = (1-x)^2$$

$$c' = -2(1-x) = 2x - 2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{ab}{c} \right)' = \frac{(ab)'c - abc'}{c^2} = \frac{(a'b + ab')c - abc'}{c^2} = \frac{a'bc + ab'c - abc'}{c^2} \\ &= \frac{-2x(3-x^3)(1-x)^2 - 3x^2(2-x^2)(1-x)^2 - (2-x^2)(3-x^3)2(x-1)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{-2x(3-x^3)(1-x) - 3x^2(2-x^2)(1-x) + 2(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.5.

$$f(x) = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^p}, p \in \mathbb{R}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^p \\ f'(x) &= p \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{p-1} \left(\frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \right) \\ &= \frac{2p}{(1+x)^2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{p-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.6.

$$f(x) = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{2+x^3}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{2+x^3} \\ &= (1+x)(2+x^2)^{\frac{1}{2}}(2+x^3)^{\frac{1}{3}} \\ a &= 1+x \\ a' &= 1 \\ b &= (2+x^2)^{\frac{1}{2}} \\ b' &= \frac{1}{2}(2+x^2)^{-\frac{1}{2}}2x = x(2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ c &= (2+x^3)^{\frac{1}{3}} \\ c' &= \frac{1}{3}(2+x^3)^{-\frac{2}{3}}3x^2 = x^2(2+x^3)^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (ab)'c + abc' \\ &= (a'b + ab')c + abc' \\ &= a'bc + ab'c + abc' \\ &= (2+x^2)^{\frac{1}{2}}(2+x^3)^{\frac{1}{3}} + (1+x)x(2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2+x^3)^{\frac{1}{3}} + (1+x)(2+x^2)^{\frac{1}{2}}x^2(2+x^3)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{2+x^3} + \frac{x(1+x)\sqrt[3]{2+x^3}}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{x^2(1+x)\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(2+x^3)^2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 12.5.7.

$$f(x) = \sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}$$

Lösung:

$$a = (1-x)^m$$

$$a' = -m(1-x)^{m-1}$$

$$b = (1+x)^n$$

$$b' = n(1+x)^{n-1}$$

$$f(x) = \sqrt[m+n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{m+n}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{m+n} \left((1-x)^m (1+x)^n \right)^{\frac{1}{m+n}-1} \cdot \left(-m(1-x)^{m-1} (1+x)^n + (1-x)^m n(1+x)^{n-1} \right)$$

$$= \frac{1}{m+n} \cdot \frac{\sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}}{(1-x)^m (1+x)^n} \cdot (1-x)^m (1+x)^n \left(\frac{n}{1+x} - \frac{m}{1-x} \right)$$

$$= \frac{1}{m+n} \cdot \left(\frac{n}{1+x} - \frac{m}{1-x} \right) \cdot \sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}$$

Aufgabe 12.5.8.

$$f(x) = \sin^n x \cdot \cos nx, n \in \mathbb{N}$$

Lösung:

$$a = \sin^n x$$

$$a' = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x$$

$$b = \cos nx$$

$$b' = -n \sin nx$$

$$f'(x) = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x \cdot \cos nx + \sin^n x \cdot (-n \sin nx)$$

Aufgabe 12.5.9.

$$f(x) = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

Lösung:

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$$

$$a = \frac{x}{2}$$

$$b = \tan a$$

$$b' = (1 + \tan^2 a)a'$$

$$= \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \ln b$$

$$f'(x) = \frac{b'}{b}$$

$$= \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}}{\tan \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{2 \tan \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2 \tan \frac{x}{2}} + \frac{\tan \frac{x}{2}}{2}$$