Aufgabe 13.1.

Finden Sie eine Differentialgleichung 1.Ordnung, die die Funktion $f(x) = xe^{-x^2}$, $x > 0$ als eine Lösung hat.

Lösung:

Es muss $f' = G(x, f(x)) = G(x, xe^{-x^2})$ sein:

$$
\begin{aligned}
f(x)' &= \left(xe^{-x^2}\right) \\
&= e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} \\
&= e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right)
\end{aligned}
$$

Die Gleichsetzung ergibt:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f'(x) \\
xe^{-x^2} &= e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right) \\
x &= 1 - 2x^2 \\
0 &= -2x^2 - x + 1 \\
0 &= x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\
x_{1,2} &= -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \\
x_1 &= -1 \\
x_2 &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

x_1 entfällt, da nur positive Zahlen als Lösung zugelassen wurden.

<u>Aufgabe 13.2.</u>

Finden Sie die Riemann-Zwischensumme ZS(Z_n,f) für jedes n=1,2,..., $f(x)=1+x$ und $[a,b]=[-1,4]$, wenn Sie eine äquidistante Zerlegung $\{I_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$, $I_k^{(n)}=\left[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}\right)$ von [-1,4] annehmen und den Zwischenwert $\xi_k^{(n)}=\dfrac{x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}}{2}$ setzen.

Lösung:

$$x_k^{(n)}=a+\frac{(b-a)k}{n}=\frac{5k}{n}-1$$

$$x_{k-1}^{(n)}=\frac{5(k-1)}{n}-1$$

$$\xi_k^{(n)}=\frac{x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}}{2}\in I_k^{(n)}$$

$$f(x)=1+x$$

$$f(\xi_k^{(n)})=1+\xi_k^{(n)}$$

$$ZS(z_n,f)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k^{(n)})\left|I_k^{(n)}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\xi_k^{(n)}\right)\left|\left(\frac{5(k-1)}{n}-1\right)-\left(\frac{5k}{n}-1\right)\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}}{2}\right)\left|\frac{5(k-1)}{n}-\frac{5k}{n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}}{2}\right)\left|k-1-k\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2+x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}\right)$$

$$=5+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{5(k-1)}{n}-1\right)+\left(\frac{5k}{n}-1\right)\right)$$

$$=5+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{n}\left(k-1+k\right)-2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\left(2k-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{25}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(2k-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{25}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{25(n+1)}{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{25n}{2n} + \frac{25}{2n} \right) \\
&= \frac{25}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13.3.

Finden Sie die Riemann-Untersumme US(Z_n,f) und die Riemann-Obersumme OS(Z_n,f) für jedes n=1,2,... und die folgenden Funktionen, wenn Sie eine äquidistante Zerlegung annehmen (h=1/k):

Aufgabe 13.3.1.

$$f(x) = x^2,\ [a,b] = [-2,3]$$

Lösung:

Für x<0 ist die Untersumme x_k, für x>0 dagegen x_{k-1}. Äquivalent muss man für die Obersumme verfahren. Um die Summen jeweils definieren zu können, muss ich voraussetzen, dass n jeweils ein Vielfaches von 5 ist, was bei hinreichend großen Werten kaum ins Gewicht fällt.

$$
\begin{aligned}
x_k^{(n)} &= a + \frac{(b-a)k}{n} = \frac{5k}{n} - 2 \\
x_{k-1}^{(n)} &= \frac{5(k-1)}{n} - 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
US(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(m_k^{(n)}) \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(m_k^{(n)}) \left| \left(\frac{5(k-1)}{n} - 2 \right) - \left(\frac{5k}{n} - 2 \right) \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \left(\sum_{k=1}^{\frac{2}{5}n} \left(\frac{5k}{n} - 2 \right)^2 + \sum_{k=\frac{2}{5}n+1}^{n} \left(\frac{5(k-1)}{n} - 2 \right)^2 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \left(\sum_{k=1}^{\frac{2}{5}n} \left(\frac{25k^2}{n^2} - \frac{20k}{n} + 4 \right) + \sum_{k=\frac{2}{5}n+1}^{n} \left(\frac{25(k-1)^2}{n^2} - \frac{20(k-1)}{n} + 4 \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \left(\sum_{k=1}^{\frac{2}{5}n} \left(\frac{25k^2}{n^2} - \frac{20k}{n} + 4 \right) + \sum_{k=\frac{2}{5}n+1}^{n} \left(\frac{25k^2 - 50k + 1}{n^2} - \frac{20k - 20}{n} + 4 \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{25k^2}{n^2} - \frac{20k}{n} + 4 \right) + \sum_{k=\frac{2}{5}n+1}^{n} \left(\frac{1-50k}{n^2} + \frac{20}{n} \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \left(4n + \frac{5}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5k^2}{n} - 4k \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=\frac{2}{5}n+1}^{n} \left(\frac{1-50k}{n} + 20 \right) \right) \\
&= 20 + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \left(\frac{5}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5k^2}{n} - 4k \right) \right) \\
&= 20 + \lim_{n\to\infty} \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \left(\frac{5k}{n} - 4 \right) \\
&= 20
\end{aligned}
$$

<u>Aufgabe 13.3.2.</u>

$f(x) = \sqrt{x}$, $[a,b] = [0,1]$

Lösung:

Die Funktion ist monoton steigend, demzufolge ist $m_k^{(n)} = f(x_{k-1}^{(n)})$ und $M_k^{(n)} = f(x_k^{(n)})$.

$$
\begin{aligned}
US(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k-1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13.3.3.

$f(x) = 2^x$, $[a,b] = [0,10]$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
OS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{10k}{n}} \left| \frac{10}{n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2^{10}\right)^{\frac{k}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \sum_{k=1}^{n} 1024^{\frac{k}{n}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13.4.

Finden Sie die Riemann-Untersumme US(Z_n,f) für jedes n=1,2,... $f(x) = x^4$, $[a,b] = [1,2]$ wenn Sie eine geometrische Zerlegung $\{I_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$, $I_k^{(n)} = [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ von [1,2] annehmen, d.h. $\frac{x_k^{(n)}}{x_{k-1}^{(n)}} = q_n > 1$ für jedes k=1,2,...,n.

Lösung:

Die Funktion ist monoton steigend, demzufolge ist $m_k^{(n)} = f(x_{k-1}^{(n)})$.

$$
\begin{aligned}
US(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a + \frac{k-1}{n} \right)^4 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k-1}{n} \right)^4 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2(k-1)}{n} + \frac{k^2 - 2k + 1}{n^2} \right)^2 \\
&=
\end{aligned}
$$

<u>Aufgabe 13.5.</u>

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe der Riemann-Integralsumme (Riemann-Zwischensumme, Riemann-Untersumme, Riemann-Obersumme).
Wählen Sie eine günstige Zerlegung des Integrationsintervalls !

<u>Aufgabe 13.5.1.</u>

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Lösung:

Die Funktion ist in dem gegebenen Intervall monoton steigend, es gilt für $\frac{k-1}{n} \le \xi_k^{(n)} \le \frac{k}{n}$ stets $m_k^{(n)} \le \xi_k^{(n)} \le M_k^{(n)}$. Zusätzlich wird die Beziehung $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ausgenutzt.
Den Integrationsintervall zerlege ich äquidistant.

$$
\begin{aligned}
US(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
OS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Ich wähle $\xi_k^{(n)} = \dfrac{x_k^{(n)} + x_{k-1}^{(n)}}{2}$:

$$
\begin{aligned}
ZS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{k}{n} + \frac{k-1}{n}}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} + \frac{k-1}{n} \right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{n} \right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^{n} \left(4k^2 - 4k + 1 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^3} \left(4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^3} \cdot \frac{4n^3}{3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13.5.2.

$$\int_0^1 a^x dx, \; a > 0$$

Lösung:

Die Funktion ist in dem gegebenen Intervall monoton steigend, es gilt für $\frac{k-1}{n} \le \xi_k^{(n)} \le \frac{k}{n}$ stets $m_k^{(n)} \le \xi_k^{(n)} \le M_k^{(n)}$. Zusätzlich wird die Beziehung $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ausgenutzt. Den Integrationsintervall zerlege ich geometrisch.

$$
\begin{aligned}
US(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a^{\frac{k-1}{n}} \cdot \sqrt[n]{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k-1}{n}\ln a}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13.5.3.

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx,\ 0 < a < b$$

Hinweis: Setzen Sie den Zwischenwert $\xi_k^{(n)} = \sqrt{x_k^{(n)} x_{k-1}^{(n)}}$, k=1,2,...,n.

Lösung:

Aufgabe 13.5.4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

Lösung:

Aufgabe 13.5.5.

$$\int_0^x \cos t\,dt,\ x > 0$$

Lösung:

Aufgabe 13.5.6.

Zeigen Sie, dass die Riemannsche Funktion

$$r(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1]/Q \\ \frac{1}{p} & x = \frac{p}{q} \in [0,1] \cap Q \end{cases}$$

- wobei *p* und *q* teilerfremd sind - integrierbar ist.

Lösung:

Aufgabe 13.5.7.

Zeigen Sie, dass für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap Q \\ -1 & x \in [0,1]/Q \end{cases}$$

das Integral $\int_0^1 |f|$ existiert, jedoch das Integral $\int_0^1 f$ nicht existiert.

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap Q \\ -1 & x \in [0,1]/Q \end{cases} \right| \\ &= \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap Q \\ 1 & x \in [0,1]/Q \end{cases} \\ &= 1 \quad x \in [0,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|\, dx &= x\Big|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Das Integral dieser Funktion existiert und ist 1.