Aufgabe 14.1.

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, indem Sie die Tabelle der Grundintegrale verwenden.

Aufgabe 14.1.1.

$$\int (3-x^2)^3\,dx$$

Lösung

$$\begin{aligned}\int (3-x^2)^3\,dx &= \int (27-27x^2+9x^4-x^6)dx \\ &= 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.1.2.

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$$

Lösung

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx &= \int \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 dx \\ &= \int (x^{-2}-2x^{-1}+1)dx \\ &= -\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.1.3.

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$$

Lösung

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx &= \int \frac{x^2-1+4}{x^2-1}dx \\ &= \int dx + \int \frac{4}{x^2-1}dx \\ &= x+4\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx \\ &= x+4\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= x+2\ln(x+1)-2\ln(x-1)+c \\ &= x+2\ln\frac{x+1}{x-1}+c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.2.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie benutzen, dass $\frac{1}{a}F(ax+b)+C,\ a\neq 0$, eine Stammfunktion von $f(ax+b)$ ist, wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Aufgabe 14.2.1.

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\ dx$$

Lösung:

$$t = 1-3x$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{1-3x}\ dx &= \int \sqrt[3]{t}\,\frac{dt}{-3} \\
&= -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}dt \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot t^{\frac{4}{3}}+c \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{t^4}+c \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4}+c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.2.2.

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\ dx$$

Lösung:

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}}x = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$dx = \frac{2}{\sqrt{6}}dz$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+3x^2}\ dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2}\ dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\int\frac{dz}{1+z^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan z + c \\
&= \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}x + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.2.3.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx$$

Lösung:

$$z=\sqrt{\frac{3}{2}}x=\frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$dx=\frac{2}{\sqrt{6}}dz$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin z+c\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin \frac{\sqrt{6}}{2}x+c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.2.4.

$$\int \left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \left(e^{-x}+e^{-2x}\right)dx &= \int e^{-x}dx+\int e^{-2x}dx\\ &= -e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.2.5.

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$$

Lösung:

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx=-\cot\frac{x}{2}+c \text{ (laut Bronstein)}$$

Aufgabe 14.3.

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben, indem Sie geeignet substituieren.

Aufgabe 14.3.1.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Lösung:

$$t = 1 - x^2$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{-2x}$$
$$= \int -\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c$$
$$= -\sqrt{t} + c$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + c$$

Aufgabe 14.3.2.

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$$

Lösung:

$$t = 1 + x^3$$

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx = \int x^2\sqrt[3]{t}\,\frac{dt}{3x^2}$$
$$= \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}dt$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + c$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt[3]{t^4} + c$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^4} + c$$

Aufgabe 14.3.3.

$$\int xe^{-x^2}\,dx$$

Lösung:

$$t = -x^2$$

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \int xe^t \frac{dt}{-2x}$$
$$= -\frac{1}{2}\int e^t dt$$
$$= -\frac{1}{2}e^t + c$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

Aufgabe 14.3.4.

$$\int \tan x\,dx$$

Lösung:

$$t = \cos x$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= \int \sin x \frac{dt}{-\sin x}$$
$$= -\int \frac{1}{t}dt$$
$$= -\ln|t| + c$$
$$= -\ln|\cos x| + c$$

Aufgabe 14.3.5.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

Lösung:

Wichtig zur Ermittlung dieses Integrals ist die Kenntnis der Beziehungen $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$,

$(\sin x)'\,dx = \cos x$ und $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$:

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}}dx$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dt}{t}$$

$$= \ln|t| + c$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

Aufgabe 14.4.

Integrieren Sie, indem Sie das Integral geeignet zerlegen.

Aufgabe 14.4.1.

$$\int \cos^3 x\,dx$$

Lösung:

Ich verwende die Beziehung $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$, die aus der Darstellung der komplexen Zahlen stammt:

$$\int \cos^3 x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)^3 dx$$

$$= \int \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3i}e^{3ix} + \frac{3}{i}e^{ix} - \frac{3}{i}e^{-ix} - \frac{1}{3i}e^{-3ix}\right) + c$$

$$= \frac{1}{24i}\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + \frac{3}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + c$$

$$= \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c$$

Aufgabe 14.4.2.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)}\,dx$$

Lösung:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)}\,dx = \frac{\ln(x-1)}{4} - \frac{\ln(x+3)}{4} + c$$
$$= \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+3} + c$$

(Computerlösung)

Aufgabe 14.4.3.

$$\int \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx$$

Lösung:

$$\int \frac{x}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + c$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{2+x^2} + c$$

(Computerlösung)

Aufgabe 14.5.

Integrieren Sie partiell !

Aufgabe 14.5.1.

$$\int \ln x\,dx$$

Lösung:

$$u' = \ln x$$
$$u = \frac{1}{x}$$
$$v = 1$$
$$v' = 0$$

$$\int \ln x\,dx = \int u'v\,dx$$
$$= uv - \int uv'\,dx$$
$$= \frac{1}{x} - \int \frac{0}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{x} + c$$

Aufgabe 14.5.2.

$$\int x^n \ln x \, dx$$

Lösung:

$$u' = \ln x$$
$$u = \frac{1}{x}$$
$$v = x^n$$
$$v' = nx^{n-1}$$

$$\int x^n \ln x \, dx = \int vu' \, dx$$
$$= uv - \int uv' \, dx$$
$$= \frac{x^n}{x} - \int \frac{1}{nx^n} dx$$
$$= x^{n-1} - \frac{1}{n} \int x^{-n} dx$$
$$= x^{n-1} - \frac{1}{n(n+1)} x^{1-n} + c$$
$$= x^{n-1} - \frac{1}{(n+1)nx^{n-1}} + c$$

Aufgabe 14.5.3.

$$\int \cos(\ln x) \, dx$$

Lösung:

$$\int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2}(\sin \ln x + \cos \ln x) + c$$ (laut Bronstein)

Aufgabe 14.5.4.

$$\int x \cos x \, dx$$

Lösung:

$$u' = \cos x$$
$$u = \sin x$$
$$v = x$$
$$v' = 1$$

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, dx &= uv - \int uv' \, dx \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.5.5.

$$\int \arcsin x \, dx$$

Lösung:

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c \text{ (laut Bronstein)}$$

Aufgabe 14.5.6.

$$\int x^2 e^{-2x} \, dx$$

Lösung:

$$u = x^2$$
$$u' = 2x$$
$$v' = e^{-2x}$$
$$v = -\frac{e^{-2x}}{2}$$
$$\int x^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} + \int x e^{-2x} dx$$
$$u = x$$
$$u' = 1$$
$$v' = e^{-2x}$$
$$v = -\frac{e^{-2x}}{2}$$
$$\int x e^{-2x} dx = -\frac{x e^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2} dx$$
$$= -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c$$
$$\int x^2 e^{-2x}\,dx = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c$$
$$= -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + c$$

Aufgabe 14.5.7.

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx$$

Lösung:

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left(a \cos bx - b \sin bx\right) + c \text{ (laut Bronstein)}$$