Aufgabe 2.1.

Zeigen Sie, dass die Menge $R \subseteq M \times M, M := N \times N$

$$R := \{((m,n),(k,l)) \in M \times M : \quad m + l = k + n\}$$

eine Äquivalenzrelation auf *M* definiert !

Lösung:

Dazu müssen die drei Eigenschaften einer jeden Äquivalenzrelation gezeigt werden:

1. R ist reflexiv: (x,x) ∈ R
   Aus $((m,n),(m,n)) \in R$ müsste $m + n = n + m$ folgen. Letzteres ist eine immerwahre Aussage.

2. R ist symmetrisch: (x,y)∈R ⇒ (y,x)∈R
   Aus $((m,n),(k,l)) \in R \Rightarrow ((k,l),(m,n)) \in R$ müsste $m + l = k + n \Rightarrow k + n = l + m$ folgen. Dies wird genau so in den den Voraussetzungen definiert.

3. R ist transitiv: (x,y)∈R ∧ (y,z)∈R ⇒ (x,z)∈R
   Aus $((m,n),(k,l)) \in R \wedge ((k,l),(p,q)) \in R \Rightarrow ((m,n),(p,q)) \in R$ müsste folgen:
   a) $m + l = k + n$
   b) $k + q = p + l$
   c) $m + q = p + n$
   Aus a) + b) folgt:
   $$(m+l)+(k+q)=(k+n)+(p+l)$$
   $$(k+l)+(m+q)=(p+n)+(k+l)$$
   $$m+q=p+n$$
   ⇒ Gleichung c)

Aufgabe 2.2.

Zeigen Sie, dass die Addition $(m,n) \oplus (k,l) := (m+k, n+l), \quad [(m,n),(k,l) \in M, M := N \times N]$ verträglich mit der Äquivalenzrelation ist, d.h. aus (m,n) ~ (m',n') und (k,l) ~ (k',l') auch (m+k,n+l) ~ (m'+k',n'+l') folgt !

Lösung:

Die Voraussetzungen
a) (m,n) ~ (m',n') ⇒ m'+n=m+n'
b) (k,l) ~ (k',l')) ⇒ k'+l=k+l'

ergeben addiert:
$$m + k + n' + l' = n + l + m' + k'$$
Durch Umstellen entsteht:
$$m' + n + k' + l = m + n' + k + l'$$
$$m + n' + k + l' = m' + n + k' + l$$

Aufgabe 2.3.

Zeigen Sie, dass in Q die Gleichung p*x=q, p,q∈ Q, p≠0 immer eine Lösung hat !

Lösung:

fehlt