Aufgabe 3.1.1.

Zeigen Sie, dass die Folge $p_k = \left\langle 1 + \frac{1}{k} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ konvergiert und der Grenzwert 1 ist, d.h. es gilt: $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=1$

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass $\langle p_k - 1 \rangle$ eine Nullfolge ist:

$$\left|1+\frac{1}{k}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{k}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{k}<\varepsilon$$

$$k>\frac{1}{\varepsilon}$$

Da $\left\langle 1+\frac{1}{k}-1 \right\rangle$ eine Nullfolge ist, stellt p_k eine konvergente Folge mit dem Grenzwert 1 dar.

Aufgabe 3.1.2.

Zeigen Sie, dass die Folge $\left\langle 1+(-1)^k \frac{1}{k} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ konvergiert und der Grenzwert 1 ist, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+(-1)^k\frac{1}{k}\right)=1$!

Lösung:

Die Vorgehensweise gleicht der aus Aufgabe 3.1.1.:

$$\left|1+(-1)^k\frac{1}{k}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|(-1)^k\frac{1}{k}\right|<\varepsilon$$

$$\frac{1}{k}<\varepsilon$$

Das Ergebnis gleicht wieder dem aus Aufgabe 3.1.1., d.h. auch diese Folge konvergiert und hat den Grenzwert 1.

Aufgabe 3.1.3.

Zeigen Sie, dass die Folge $\left\langle (-1)^k \left(1+\frac{1}{k}\right) \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ nicht konvergiert !

Lösung:

Wenn k eine gerade Zahl ist ($k=2n$, $n\in \aleph$), entspricht p_k exakt der Folge aus Aufgabe 3.1.1., konvergiert demzufolge gegen 1. Für $k=2n+1$, $n\in \aleph$, ergibt sich

$$\left\langle (-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\rangle, k=2n+1, n\in \aleph$$
$$=\left\langle -\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\rangle$$

Der Grenzwert ist hier -1 (vergleiche wieder mit Aufgabe 3.1.1.).
Jede dieser beiden Teilfolgen hat einen eindeutigen Grenzwert, der jeweils einen Häufungswert der Gesamtfolge darstellt. Da die Gesamtfolge aber zwei voneinander verschiedene Häufungswerte hat, kann sie nicht konvergieren.

Aufgabe 3.1.4.

Zeigen Sie, dass die Folge $\langle k\rangle_{k=1}^{\infty}$ nicht konvergiert !

Lösung:

Das Cauchykriterium besagt, dass eine reelle Zahlenfolge genau dann gegen eine reelle Zahl konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge ist. Sollte obige Folge konvergieren, müsste sie alle Eigenschaften eine Cauchyfolge besitzen (jeweils für alle reellen $\varepsilon>0$):

$|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n,m \geq n_0(\varepsilon)$

Angewandt auf die gegebene Folge entspricht dies:

$|n-m| < \varepsilon$ für alle $n,m \geq n_0(\varepsilon)$

Schon für $\varepsilon=1$ lässt sich nur die Lösung n=m (wie groß n bzw. m sind, ist dabei irrelevant) finden. Diese genaue Spezifikation ist aber durch die Ungleichung „für alle $n,m \geq n_0(\varepsilon)$" nicht herstellbar. Damit kann $\langle k\rangle_{k=1}^{\infty}$ keine Cauchyfolge sein und ist damit auch nicht konvergent.

Aufgabe 3.2.1.

Weisen Sie nach, dass die Folge $\langle k\rangle_{k=1}^{\infty}$ keine Cauchyfolge ist !

Lösung:

siehe 3.1.4.

Aufgabe 3.2.2.

Weisen Sie nach, dass die Folge $\langle p_k\rangle_{k=1}^{\infty}$, mit $p_1 := 1$ und $p_{k+1} := 1+\frac{1}{1+p_k}$, $k\in \aleph$, eine Cauchyfolge ist.

Zeigen Sie, dass die Folge nicht konvergent in Q ist !

Lösung:

Die Differenz zweier Folgenglieder ist (Cauchy-Eigenschaft):

$$p_{k+m+1} - p_{k+1} = 1 + \frac{1}{1+p_{k+m}} - \left(1 + \frac{1}{1+p_k}\right)$$

$$= \frac{1}{1+p_{k+m}} - \frac{1}{1+p_k}$$

$$= \left(p_k - p_{k+m}\right) \cdot \frac{1}{\left(1+p_{k+m}\right)\left(1+p_k\right)}$$

$$\left|p_{k+m+1} - p_{k+1}\right| = \left|p_k - p_{k+m}\right| \cdot \frac{1}{\left(1+p_{k+m}\right)\left(1+p_k\right)}$$

Nun muss abgeschätzt werden,dass $p_{k+1}>1$ für alle k:

$$\left|p_{k+m+1} - p_{k+1}\right| \leq \frac{1}{(1+1)(1+1)} \cdot \left|p_k - p_{k+m}\right|$$

$$\leq \frac{1}{4} \cdot \left|p_k - p_{k+m}\right|$$

$$\leq \frac{1}{4^2} \cdot \left|p_{k+m-1} - p_{k-1}\right|$$

$$\leq \frac{1}{4^k} \cdot \left|p_{m-1} - p_1\right|$$

Erneut wird abgeschätzt, dass auch $p_k<2$ für alle k:

$$\left|p_{k+m+1} - p_{k+1}\right| \leq \frac{4}{4^k}$$

$$\leq \frac{1}{4^{k-1}}$$

Da sich für kleine ε stets ein hinreichend großes k finden lässt, so dass obige Bedingung erfüllt ist, ist diese Folge eine Cauchyfolge.
Jetzt muss noch gezeigt werden, dass sie nicht in Q konvergent ist:

$$p = 1 + \frac{1}{1+p}$$

$$p(1+p) = (1+p) + 1$$

$$p^2 + p = p + 2$$

$$p^2 = 2$$

$$|p| = \sqrt{2}$$

Zwar wurde errechnet, das die Folge konvergiert, jedoch ist $\sqrt{2} \notin Q$. Bewiesen wird dies, indem man annimmt, dass $\sqrt{2} \in Q$. Dann müsste gelten (n,m $\in$ N):

$$p = \frac{n}{m}$$
$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$
$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2$$
$$2 = \frac{n^2}{m^2}$$
$$2m^2 = n^2$$

In der Primfaktorzerlegung von n^2 müsste die 2 auftauchen. Da es sich bei n^2 um eine Quadratzahl handelt, müsste die 2 in gerader Anzahl vorhanden sein. Sollte dies möglich sein, so wäre die 2 in m^2 in ungerader Anzahl enthalten, was aber unmöglich ist, da auch m^2 eine Quadratzahl ist. Somit ist bewiesen worden, dass $\sqrt{2} \notin Q$.

Aufgabe 3.3.1.

Zeigen Sie, dass die Folgen $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ und $\left\langle \frac{1}{k^2} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ äquivalent sind !

Lösung:

Zwei Folgen sind genau dann äquivalent, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Bezogen auf die gegebenen Folgen entsteht:

$$\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle_{k=1}^{\infty} - \left\langle \frac{1}{k^2} \right\rangle_{k=1}^{\infty} = \left\langle \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$$

Da k^2 schneller wächst als k und stets positiv ist, gilt: $0 < \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\frac{1}{k}$ eine Nullfolge ist. Somit muss $\left\langle \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ auch eine Nullfolge sein.

Aufgabe 3.3.2.

Zeigen Sie, dass die Folge $\langle p_k \rangle_{k=1}^{\infty}$, definiert in Aufgabe 3.2.2., und die Folge $\langle q_k \rangle_{k=1}^{\infty}$, mit $q_1 := 1$ und $q_{k+1} := 1 + \frac{q_k}{2 + q_k}$, $k \in \aleph$, äquivalent sind !

Lösung:

Wiederum ist zu zeigen, dass die Differenz beiden Folgen eine Nullfolge ist.

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} - q_{k+1} &= 1 + \frac{1}{1+p_k} - \left(1 + \frac{q_k}{2+q_k}\right) \\
&= \frac{1}{1+p_k} - \frac{q_k}{2+q_k} \\
&= \frac{1}{(1+p_k)(2+q_k)}(2 - p_k q_k) \\
&= \frac{p_k}{(1+p_k)(2+q_k)}\left(\frac{2}{p_k} - q_k\right)
\end{aligned}
$$

Einsetzen von k=2,3,... führt zu den Abschätzungen:

$$
\begin{matrix} \dfrac{p_k}{1+p_k} \le 1 \\ \dfrac{1}{2+p_{k-1}} \le \dfrac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \dfrac{2}{2+q_k} \le 1 \\ \dfrac{1}{2+q_{k-1}} \le \dfrac{1}{2} \end{matrix}
$$

sowie

$$\left|p_{k+1} - q_{k+1}\right| \le \frac{1}{2 \cdot 2}\left|p_{k-1} - q_{k-1}\right|$$

Sei k+1:=k, so

$$\left|p_k - q_k\right| \le 2^{-2}\left|p_{k-2} - q_{k-2}\right| \text{ für k=3,4,... .}$$

Erneutes anwenden der Abschätzung auf sich ergibt:

$$\left|p_k - q_k\right| \le 2^{-2}\left|p_{k-2} - q_{k-2}\right| \le 2^{-4}\left|p_{k-4} - q_{k-4}\right|$$

Allgemeiner ist:

$$\left|p_{2m} - q_{2m}\right| \le 2^{-2(m-1)}\left|p_2 - q_2\right| \quad \text{(dabei sei } k \text{ eine gerade Zahl: } k\text{=2}m\text{, m=2,3,...)}$$

Da p_2=3/2 und q_2=4/3 ist p_2-q_2=1/6, was abschätzen lässt:

$$\left|p_{2m} - q_{2m}\right| \le 2^{-2(m-1)} \cdot \frac{1}{6}\text{, dies ist eine Nullfolge.}$$

Für ungerade k (k=2m+1, m=1,2,...) findet sich die Abschätzung:

$$\left|p_{2m+1} - q_{2m+1}\right| \le 2^{-2m}\left|p_1 - q_1\right|$$

Da p_1=q_1=1 folgt daraus p_{2m+1}=q_{2m+1} für m=1,2,... .
Sowohl $\langle p_{2m} - q_{2m} \rangle$ als auch $\langle p_{2m+1} - q_{2m+1} \rangle$ sind Nullfolgen, demzufolge ist auch $\langle p_m - q_m \rangle$ eine Nullfolge.

<u>Aufgabe 3.4.</u>

Beweisen Sie, dass die Multiplikation von komplexen Zahlen kommutativ ist, d.h. es gilt $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$!

Lösung:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

Da a_1, a_2, b_1 und b_2 reelle Zahlen sind und die Kommutativität sowohl der Addition als auch der Multiplikation bereits in der Vorlesung nachgewiesen wurde, gilt:

$$\begin{aligned} &= (a_2 a_1 - b_2 b_1) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i \\ &= (a_2 + b_2 i) \cdot (a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, dass die Multiplikation komplexer Zahlen kommutativ ist.

<u>Aufgabe 3.5.</u>

Beweisen Sie, dass die Ungleichung $\left| |z_1| - |z_2| \right| \le |z_1 - z_2|$ im Bereich der komplexen Zahlen besteht !

Lösung:

Zwei wichtige Eigenschaften der komplexen Zahlen werden vorausgesetzt (a,b sind reelle Zahlen):

I. $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

II. $\quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$

Damit lässt sich herleiten:

$$\begin{aligned} \left| |z_1| - |z_2| \right| &\le |z_1 - z_2| \\ \left| \sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right| &\le \left| (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i \right| \\ \left| \sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right| &\le \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \\ \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \right)^2 &\le (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 \\ (a_1^2 + b_1^2) - 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} + (a_2^2 + b_2^2) &\le (a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2) + (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2^2) \\ -2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} &\le -2a_1 a_2 - 2b_1 b_2 \\ \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} &\ge a_1 a_2 + b_1 b_2 \\ (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) &\ge (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 \\ a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + b_1^2 b_2^2 &\ge a_1^2 a_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 \\ a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 &\ge 2a_1 a_2 b_1 b_2 \\ a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 &\ge 0 \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Da weiterhin $x^2 \ge 0$ für alle x gilt, ist die Ungleichung bewiesen worden.