Aufgabe 5.1.

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ (jeweils n∈ N) für die Folgen

1. $a_n = \frac{3n^2 - 7n + 2}{2n^2 - 6n + 1}$
2. $a_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 4n + 10}$
3. $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$
4. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Lösung:

1. Diese Aufgabe löst sich mit dem Ansatz, dass man die höchste Potenz extrahiert und somit alle kleineren Potenzen zu Nullfolgen werden lässt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 7n + 2}{2n^2 - 6n + 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(2 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. Das Lösungsverfahren entspricht dem aus Aufgabe 1.:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 4n + 10} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{10}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{10}{n^2}} \\ &= 1\end{aligned}$$

3. Die binomische Ergänzung erzeugt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} \\
&= \frac{e}{e\cdot 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. Die indirekte Anwendung des zweiten binomischen Satzes erlaubt die Umformung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 5.2.</u>

Man bestimme die Häufungspunkte der komplexen Zahlenfolge $\{z_n\}$, $n\in\mathbb{N}$:

$$z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)i^n$$

Lösung:

Aufgrund der Beziehung $i^2=-1$ und demzufolge $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$ bilde ich vier Teilfolgen:

1. Für Vielfache von 4 ergibt sich:

$$k = 4n:$$

$$\begin{aligned} z_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right)i^k \\ &= \left(1+\frac{1}{4n}\right)i^{4n} \\ &= \left(1+\frac{1}{4n}\right)1^n \\ &= 1+\frac{1}{4n} \\ \lim_{k\to\infty} z_k &= 1+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Für k=4n+1:

$$\begin{aligned} z_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right)i^k \\ &= \left(1+\frac{1}{4n+1}\right)i^{4n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{4n+1}\right)1^n i \\ &= \left(1+\frac{1}{4n+1}\right)i \\ &= i+\frac{i}{4n+1} \\ \lim_{k\to\infty} z_k &= i+\lim_{k\to\infty}\frac{i}{k} \\ &= i \end{aligned}$$

3. Für k=4n+2:

$$\begin{aligned} z_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right)i^k \\ &= \left(1+\frac{1}{4n+2}\right)i^{4n+2} \\ &= -\left(1+\frac{1}{4n+2}\right) \\ &= -1-\frac{1}{4n+2} \\ \lim_{k\to\infty} z_k &= -1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} \\ &= -1 \end{aligned}$$

4. Für k=4n+3:

$$\begin{aligned}
z_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right)i^k \\
&= \left(1+\frac{1}{4n+3}\right)i^{4n+3} \\
&= \left(1+\frac{1}{4n+3}\right)1^n(-i) \\
&= -\left(1+\frac{1}{4n+3}\right)i \\
&= -i-\frac{i}{4n+3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} z_k &= -i-\lim_{k\to\infty}\frac{i}{k} \\
&= -i
\end{aligned}$$

Die Häufungspunkte dieser komplexen Zahlenfolge sind -1, 1, i und -i bzw. als Zahlentupel in C (-1,0), (1,0), (0,1) und (0,-1).

Aufgabe 5.3.

Man zeige, dass eine reelle und monotone Folge genau dann konvergent ist, wenn sie beschränkt ist.

Lösung:

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt jede beschränkte Folge min. einen Häufungspunkt. Da vorausgesetzt wird, dass diese Folge x_n auch noch monoton sein soll, kann sie nur einen einzigen Häufungspunkt besitzen:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$a-\varepsilon \le a_n \le a+\varepsilon$$

Aufgabe 5.4.

Man bestimme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folgen

I. $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$

II. $a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$

Lösung:

I. Zuerst forme ich a_n etwas um:

$$(-1)^n \frac{n+1}{n} = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Ich zerlege die Folge in zwei Teilfolgen, jeweils eine für gerade und eine für ungerade n, um so beide Häufungspunkte dieser Folge zu ermitteln:

$$\limsup_{k\to\infty}(-1)^{2k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$
$$=1+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}$$
$$=1$$

$$\liminf_{k\to\infty}(-1)^{2k+1}\left(1+\frac{1}{2k}\right)=\lim_{k\to\infty}-\left(1+\frac{1}{2k}\right)$$
$$=-1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k}$$
$$=-1$$

II. Diese Folge weist nur einen Häufungspunkt auf, d.h. sie konvergiert und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$
$$=2+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$
$$=2$$

Da der größte und der kleinste Häufungspunkt dieser Folge zusammenfallen, ist $\limsup_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_n$.