Aufgabe 5.1.

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (jeweils n∈N) für die Folgen

1. $a_n = \dfrac{3n^2 - 7n + 2}{2n^2 - 6n + 1}$
2. $a_n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{n^2 + 4n + 10}$
3. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$
4. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Lösung:

1. Diese Aufgabe löst sich mit dem Ansatz, dass für große *n* der Term n^2 am schnellsten wächst und somit den Grenzwert am meisten beeinflußt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3n^2 - 7n + 2}{\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 - 6n + 1}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3n^2}{\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2n^2}$$
$$= \frac{3}{2}$$

2. Das Lösungsverfahren entspricht dem aus Aufgabe 1.:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^2 - 3n + 2}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2 + 4n + 10}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2}$$
$$= 1$$

3. Mit der Beziehung $a^b = e^{b \cdot \ln a}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln 1} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot 0} \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. Die indirekte Anwendung des zweiten binomischen Satzes erlaubt die Umformung:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 5.2.</u>

Man bestimme die Häufungspunkte der komplexen Zahlenfolge $\{z_n\}$, $n\in N$:

$$z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)i^n$$

Lösung:

Aufgrund der Beziehung $i^2=-1$ und demzufolge $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$ bilde ich vier Teilfolgen:

1. Für Vielfache von 4 ergibt sich:

$$k = 4n:$$

$$\begin{aligned} z_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right) i^k \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right) i^{4n} \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right) 1^n \\ &= 1+\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} z_k &= 1+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Für k=4n+1:

$$\begin{aligned} z_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right) i^k \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right) i^{4n+1} \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right) 1^n i \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right) i \\ &= i+\frac{i}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} z_k &= i+\lim_{k\to\infty}\frac{i}{2n} \\ &= i \end{aligned}$$

3. Für k=4n+2:

$$\begin{aligned} z_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right) i^k \\ &= \left(1+\frac{1}{2n}\right) i^{4n+2} \\ &= -\left(1+\frac{1}{2n}\right) \\ &= -1-\frac{1}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} z_k &= -1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2n} \\ &= -1 \end{aligned}$$

4. Für $k=4n+3$:

$$\begin{aligned}
z_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right)i^k \\
&= \left(1+\frac{1}{2n}\right)i^{4n+3} \\
&= \left(1+\frac{1}{2n}\right)1^n(-i) \\
&= -\left(1+\frac{1}{2n}\right)i \\
&= -i-\frac{i}{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} z_k &= -i-\lim_{k\to\infty}\frac{i}{2n} \\
&= -i
\end{aligned}$$

Die Häufungspunkte dieser komplexen Zahlenfolge sind -1, 1, i und -i bzw. als Zahlentupel in C (-1,0), (1,0), (0,1) und (0,-1).

Aufgabe 5.3.

Man zeige, dass eine reelle und monotone Folge genau dann konvergent ist, wenn sie beschränkt ist.

Lösung:

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt jede beschränkte Folge min. einen Häufungspunkt. Da vorausgesetzt wird, dass diese Folge x_n auch noch monoton sein soll, kann sie nur einen einzigen Häufungspunkt besitzen:

$$\left|x_{n_k}-x\right|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon &> x-x_{n_k} \\
&= x-x_n+x_n-x_{n_k} \\
&\geq x-x_n
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.4.

Man bestimme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der Folgen

I. $\quad a_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{n}$

II. $\quad a_n=2+\dfrac{(-1)^n}{n}$

Lösung:

I. Zuerst forme ich a_n etwas um:

$$(-1)^n \frac{n+1}{n} = (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Der Faktor (-1)^n bestimmt hierbei nur das Vorzeichen. Da n^{-1} für große n immer kleiner wird, muss ich die kleinstmöglichen n für diese Folge wählen (unter Beachtung von (-1)^n).
Somit ist:

$$\limsup_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to n=2$$
$$=(-1)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

und:

$$\liminf_{n\to\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \to n=1$$
$$=(-1)^1\left(1+\frac{1}{1}\right)$$
$$=-2$$

II. Die Vorgehensweise entspricht im wesentlichen Aufgabenteil I.:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right) \to n=2$$
$$=2+\frac{(-1)^2}{2}$$
$$=\frac{5}{2}$$

sowie:

$$\liminf_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right) \to n=1$$
$$=2+\frac{(-1)^1}{1}$$
$$=1$$