Aufgabe 7.1.

Man zeige, dass die verallgemeinerte harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $s \in (0,1]$ divergent und für $s>1$ konvergent ist.

Lösung:

Der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder der verallgemeinerten harmonischen Reihe ergibt:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)^s}}{\frac{1}{k^s}} = \frac{k^s}{(k+1)^s} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^s$$

Weiter gilt:

$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$, wobei dies eine streng monoton steigende Folge ist, d.h. $0<a_k<1$. In diesem Zahlenbereich ist: $a_k^s < a_k$ für s>1 und $a_k^s > a_k$ für $s<1$. Da sich für $s<1$ für große k nicht immer ein q finden lässt, so dass $\frac{a_{k+1}}{a_k} < q < 1$ stets gilt, sind diese Reihen divergent. Die Reihe für $s=1$ ist ebenfalls divergent, das wurde in der Vorlesung bereits gezeigt. Für $s>1$ lässt sich dagegen immer ein q finden, diese Reihen sind konvergent.

Aufgabe 7.2.

Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^k}$ für $a \in (0,1]$ divergent und für $a>1$ konvergent ist.

Lösung:

Für a>1 ist $\frac{1}{1+a^k} < \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k = q^k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}$. Die Existenz dieser Summe zeigt, dass die Reihe konvergiert.

Dagegen ist für $a \le 1$ auch $a^k \le 1$, also $1+a^k \le 2$, somit $\frac{1}{2} \le \frac{1}{1+a^k}$. Die notwendige Bedingung einer Reihe, dass die zugrundeliegende Folge eine Nullfolge sein muss, ist damit nicht erfüllt.

Aufgabe 7.3.

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ divergent ist.

Lösung:

Die Logarithmengesetze erlauben $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(1+k) - \ln k$. Für die Reihenentwicklung ergibt sich damit:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+k) - \sum_{k=1}^{n} \ln k$$
$$= \sum_{k=2}^{n+1} \ln k - \sum_{k=1}^{n} \ln k$$
$$= \ln(n+1) - \ln 1$$
$$= \ln(n+1)$$

Letzteres Wert geht für große *n* gegen ∞, somit ist die Reihe divergent.

<u>Aufgabe 7.4.</u>

Zeigen Sie die Konvergenz oder Divergenz der folgenden Reihen:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k^2+1)}}$
3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^p}$, p>0
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$
5. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$
6. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln k))^{\ln k}}$
7. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln(\ln k)}}$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bk)^s}$, a,b,s > 0
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{x}{k}$, 0<x<π
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x}{k}\right)$, 0<x<π

Lösung:

1. Diese Reihe ist divergent, da $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{4k^2}} = \frac{1}{2k}$, was die harmonische Reihe ist.

2. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k\left(k^2+1\right)}}$ konvergiert, da sie sich mit der verallgemeinerten harmonischen Reihe abschätzen lässt:
$$\frac{1}{\sqrt{k(k^2+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

3. Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^p}$, p>0, divergiert:

   Es wächst jede Potenz schneller als der Logarithmus, d.h. $\ln k < k^{\alpha}$ für $\alpha > 0$.
   Deshalb gilt $(\ln k)^p < k^{\alpha p}$. Für kleine α ist αp<1 und somit:
   $$\left|\frac{1}{(\ln k)^p} > \frac{1}{k^{\alpha p}}\right.$$ (Abschätzung anhand der verallgemeinerten harmonische Reihe)

4. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ ist konvergent. Die Bildung der ersten Reihenglieder ergibt:
$$\frac{1!}{1^1} = \frac{1}{1},\ \frac{2!}{2^2} = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2},\ \frac{3!}{3^3} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}$$ usw.

   Es kann wieder abgeschätzt werden, indem man Zähler und Nenner vergleicht: $\frac{k!}{k^k} \leq \frac{1\cdot 2}{k\cdot k} = \frac{2}{k^2}$ und man kommt auf die verallgemeinerte harmonische Reihe zurück.

5. Die Beziehung $a^b = e^{b \ln a}$ und die Logarithmengesetze ergeben:
$$\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}} = \frac{1}{e^{\ln(\ln k)\ln k}} = \frac{1}{\left(e^{\ln k}\right)^{\ln\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln(\ln k)}}$$
   Weiter ergibt sich, dass $\ln\ln k \geq 2$ für k>14, also $\frac{1}{k^{\ln(\ln k)}} \leq \frac{1}{k^2}$. Wie in den vorangegangenen Aufgaben ergibt sich auch diesmal die verallgemeinerte harmonische Reihe als Majorante, d.h. die gegebene Reihe konvergiert.

6. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie in 7.4.5., auch diese Reihe konvergiert:
$$\frac{1}{(\ln\ln k)^{\ln k}} = \frac{1}{e^{\ln\ln\ln k \ln k}} = \frac{1}{\left(e^{\ln k}\right)^{\ln\ln\ln k}} = \frac{1}{k^{\ln\ln\ln k}} \leq \frac{1}{k^2}$$
   Letztere Ungleichung gilt aber erst für $k = e^{e^e} \approx 3814280$

7. Divergent hingegen ist $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln(\ln k)}}$:

$$\frac{1}{(\ln k)^{\ln\ln k}} = \frac{1}{e^{\ln\ln k \ln\ln k}} = \frac{1}{e^{(\ln\ln k)^2}}$$

Die Vorgehensweise ähnelt jetzt der aus Aufgabe 7.4.3.:

$$(\ln k)^p \le x^{\alpha p}$$

$$(\ln\ln k)^2 \le (\ln k)^{2\alpha}$$

Man setzt jetzt $\alpha = \frac{1}{2}, (\ln k)^2 \le x$, dann ist:

$$(\ln\ln k)^2 \le \ln k$$

$$\frac{1}{k} \le \frac{1}{e^{(\ln\ln k)^2}}$$

Da die Minorante divergiert, divergiert auch die gegebene Reihe.

8. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bk)^s}$, $a,b,s > 0$ konvergiert bzw. divergiert in Abhängigkeit von s:

$\frac{1}{(a+bk)^s} \le \frac{1}{b^s k^s}$ Wenn $s>1$, dann liegt Konvergenz vor.

9. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$ konvergiert laut Aufgabe 7.1., da

$\frac{1}{k\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{k \cdot k^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ und für s>1 die verallgemeinerte harmonische Reihe $\frac{1}{k^s}$ konvergiert.

10. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{x}{k}$, $0<x<\pi$ divergiert:

$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ (siehe auch Aufgabe 9.1.2.)

Nun setzt man $\alpha = \frac{x}{k}$ und erhält durch Erweiterung im Zähler und Nenner:

$\frac{\frac{x}{k}\sin\frac{x}{k}}{\frac{x}{k}} > \frac{x}{2k}$, da für hinreichend große k die Beziehung $\frac{\sin\frac{x}{k}}{\frac{x}{k}} > \frac{1}{2}$ gilt. Der Vergleich mit der harmonischen Reihe als Minorante beweist, dass die Reihe divergiert.

11. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{k}\right)$, 0<x<π

Diesmal ist $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}=0$ (siehe Aufgabe 9.2.3.). Die Ersetzung $\alpha=\frac{x}{k}$ und die Erweiterung ergeben:

$\frac{\frac{x}{k}\left(1-\cos\frac{x}{k}\right)}{\frac{x}{k}}<\frac{x}{2k}$ da für hinreichend große k die Beziehung $\frac{1-\cos\frac{x}{k}}{\frac{x}{k}}<\frac{1}{2}$ gilt. Der Vergleich mit der harmonischen Reihe als Majorante beweist, dass die Reihe konvergiert.