Aufgabe 8.1.

Seien $f(x)=\sqrt{x}, dom(f)=(0,5)$ und $g(x)=x^2-4, dom(g)=(0,3)$. Man bestimme $dom(f\cdot g)$.

Lösung:

Für $f\cdot g$ gilt $ran(g)\subseteq dom(f)$, somit $ran(g)\subseteq(-4,5)$. Da sich aber für $f(x)$ nur $dom(f)=(0,5)$ ergibt, ist $dom(f\cdot g)=(2,5)$.

Aufgabe 8.2.

Man gebe jeweils eine unendliche Teilmenge von R an,

i. in der jeder Punkt ein Häufungspunkt ist,
ii. die keinen Häufungspunkt hat,
iii. die nur aus isolierten Punkten besteht, aber einen Häufungspunkt hat.

Lösung:

i. $A:=\bigcup_{x\in R} x$
ii. $B:=\bigcup_{x\in N} x$
iii. $C:=$

Aufgabe 8.3.

Man bestimme die Menge aller Häufungspunkte von

i. $A:=\bigcup_{n\in N}\left(\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)$,
ii. $B:=\left\{x\in R: x=n+\frac{1}{m}, n,m\in N\right\}$.

Lösung:

i. Die Häufungspunkte sind 0 und 2, da $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ und $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=0$
ii.

Aufgabe 8.4.

Seien $f(x):=\frac{x^2-4x+3}{2x-6}, dom(f)=R/\{3\}$ und $g(x):=\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, dom(g)=\overline{R_+}, \overline{R_+}=\{x\in R: x\geq 0\}$.

Man beweise:

1. $\lim_{x\to 3} f(x)=1$,
2. $\lim_{x\to 1} g(x)=\frac{1}{2}$.

Lösung:

<u>Hinweis:</u> Ich forme die Funktionen derart um, dass sie äquivalent zur Ursprungsgleichung sind, jedoch der neue *domain* auch die nicht-definierten Stelle enthält und somit sich der Grenzwert dort berechnen lässt.

1. Die binomische Ergänzung liefert:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9+2x-6}{2(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2+2(x-3)}{2(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)}{2}+1\right)$$
$$=1$$

2. Erneut kommt die zweite binomische Formel zum Zuge:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

Aufgabe 8.5.

Man berechne die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$,
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}, a\in R, n\in N$,
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Lösung:

1. Es ergibt sich (Satz von de l'Hospital):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'}{1}$$
$$=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=0$$

2. Nach den binomischen Gesetzen ist (Satz von de l'Hospital):

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n-k}a^k-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n-k}a^k}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)^n-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n-k}a^k}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)^n}{x-a}-\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n-k}a^k}{x-a}\right) \\
&= \lim_{x\to a}\left((x-a)^{n-1}-\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n-k}a^k}{x-a}\right) \\
&= \lim_{x\to a}\left(-\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n-k}a^k}{x-a}\right) \\
&= \lim_{x\to a}\left(-\frac{(x-a)^n}{x-a}\right) \\
&= \lim_{x\to a}\left(-(x-a)^{n-1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

3. Die binomische Ergänzung liefert:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+1}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+x} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$