A U F G A B E N "A N A L Y S I S"

16. Vorlesung

16.1 Es sei V ein linearer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Man zeige

16.1.1 $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow \{\lambda = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0\}, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad x \in V,$

16.1.2 $(-1)a = -a, \quad x \in V.$

16.2 Für reelle Fuktionen f, g und $\alpha \in \mathbb{R}$ sind Summe und Sklarenmultiplikation definiert durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \tag{1}$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad x \in \operatorname{dom}(f) \tag{2}$$

Sei $V := \{f : f \text{ reelle Funktion}\}$. Für $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ sei $V(\mathcal{D}) := \{f \in V : \operatorname{dom}(f) = \mathcal{D}\}$. Man zeige: Mit oben definierter Addition und Skalarendefinition ist für

16.2.1 $V(\mathcal{D})$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$,

16.2.2 V kein linearer Raum.

16.3 Für $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, sei $P_n([a,b])$ der lineare Raum der auf $[a,b]$ eingeschränkten Polynome vom Grad $\leq n$. Für $p, q \in P_1([0,1])$, $p(x) := a_0 + a_1 x$, $q(x) := b_0 + b_1 x$, $x \in [0,1]$, $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, sei

$$(p,q) := a_0 b_0 + \frac{1}{2}(a_0 b_1 + a_1 b_0) + \frac{1}{3} a_1 b_1. \tag{3}$$

Man zeige, daß damit ein Skalarprodukt auf $P_1([0,1])$ definiert ist.

16.4 Sei V ein linearer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit dem Sklarprodukt $(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ und der zugehörigen Norm $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, $x \in V$. Man zeige: Es gelten die Polarisationsgleichungen

16.4.1 für $\mathbb{K} = \mathbb{R} : (x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2), \quad x, y \in V,$

16.4.2 für $\mathbb{K} = \mathbb{C} : (x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2), \quad x, v \in V.$

16.5 Sei V ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, und $x_1, \ldots, x_n \in V$. Man zeige:

16.5.1 Sind $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig, dann sind auch $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.

16.5.2 Sind $x_1, \ldots, x_k$ linear abhängig, dann sind auch $x_1, \ldots, x_n$ linear abhängig.

16.6 Seien

$$M_1 := \{x : x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x > 0\} \tag{4}$$

$$M_2 := \{x : x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1 = 2x_2, x_3 = 0\} \tag{5}$$

$$M_3 := \{x : x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1 = x_2 + 1\}. \tag{6}$$

Welche der drei Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind Teilräume?