A U F G A B E N "A N A L Y S I S"

18. Vorlesung

18.1 Sei $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Man beweise, daß T invertierbar ist und bestimme T^{-1}.

18.2 Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Ferner sei $Z^j, D^k, E^{jk} \in M_{m\times n}$, $j = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots, n$, definiert durch

$$Z^j_{pq} \;:=\; \delta_{jp} \sum_{s=1}^{n} \delta_{qs}, \quad p = 1, 2, \ldots, m, q = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

$$D^k_{pq} \;:=\; \sum_{s=1}^{m} \delta_{ps}\delta_{qk}, \quad p = 1, 2, \ldots, m, q = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

$$E^{jk}_{pq} \;:=\; \delta_{jp}\delta_{kq}, \quad p = 1, 2, \ldots, m, q = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

Welche der Mengen $\{Z^j\}_{j=1}^m$, $\{D^k\}_{k=1}^n$ und $\{E^{jk}\}_{j=1,k=1}^{m,n}$ bildet eine Basis in $M_{m\times n}$?

18.3 Man bestimme die Matrixdarstellungen der folgenden Abbildungen:

18.3.1 $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

18.3.2 $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

18.3.3 $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 5x_1 - 2x_2 + x_3. \tag{7}$$