A U F G A B E N “A N A L Y S I S”

3. Vorlesung

3.1 Zeigen Sie, daß

3.1.1 die Folge $\left\langle 1+\frac{1}{k}\right\rangle_{k=1}^{\infty}$ konvergiert und der Grenzwert 1 ist, d.h.

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=1, \tag{1}$$

3.1.2 die Folge $\left\langle 1+(-1)^k\frac{1}{k}\right\rangle_{k=1}^{\infty}$ konvergiert und der Grenzwert 1 ist, d.h.

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+(-1)^k\frac{1}{k}\right)=1, \tag{2}$$

3.1.3 die Folge $\left\langle (-1)^k(1+\frac{1}{k})\right\rangle_{k=1}^{\infty}$ nicht konvergiert,

3.1.4 die Folge $< k >_{k=1}^{\infty}$ nicht konvergiert.

3.2 Weisen Sie nach, daß

3.2.1 die Folge $< k >_{k=1}^{\infty}$ keine Cauchy-Folge ist,

3.2.2 die Folge $< p_k >_{k=1}^{\infty}$,

$$p_1 := 1 \qquad \text{and} \quad p_{k+1} := 1+\frac{1}{1+p_k}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{3}$$

eine Cauchy-Folge ist, d.h., für jedes $\epsilon\in\mathbb{Q}_+$ existiert ein $k(\epsilon)\in\mathbb{N}$, so daß für $k,l\geq k(\epsilon)$ die Ungleichung $|p_k-p_l|<\epsilon$ gilt. Zeigen Sie, daß die Folge nicht konvergent in $\mathbb{Q}$ ist.

3.3 Zeigen Sie, daß

3.3.1 die Folgen $\left\langle\frac{1}{k}\right\rangle_{k=1}^{\infty}$ und $\left\langle\frac{1}{k^2}\right\rangle_{k=1}^{\infty}$ äquivalent sind,

3.3.2 die Folge $< p_k >_{k=1}^{\infty}$, definiert in Aufgabe 3.2.2, und die Folge $< q_k >_{k=1}^{\infty}$,

$$q_1 = 1 \quad \text{and} \quad q_{k+1} = 1+\frac{q_k}{2+q_k}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

äquivalent sind.

Beweis: Wir betrachten die Differenz

$$\begin{aligned}
&p_{k+1}-q_{k+1}\\
&\quad= \frac{1}{1+p_k}-\frac{q_k}{2+q_k}\\
&\quad= \frac{1}{1+p_k}\frac{1}{2+q_k}(2-p_kq_k)\\
&\quad= \frac{p_k}{1+p_k}\frac{1}{2+q_k}\left(\frac{2}{p_k}-q_k\right).
\end{aligned}$$

Aus (**??**) und (**??**) erhalten wir

$$p_k = 1 + \frac{1}{1+p_{k-1}} \qquad \text{and} \qquad q_k = 1 + \frac{q_{k-1}}{2+q_{k-1}} \tag{5}$$

für $k = 2, 3, \ldots$. Setzen wir diese Beziehungen ein, so finden wir

$$\begin{aligned} & p_{k+1} - q_{k+1} \\ & \quad = \frac{p_k}{1+p_k} \frac{2}{2+q_k} \left(\frac{1+p_{k-1}}{2+p_{k-1}} - \frac{1+q_{k-1}}{2+q_{k-1}} \right) \\ & \quad = \frac{p_k}{1+p_k} \, \frac{2}{2+q_k} \, \frac{1}{2+p_{k-1}} \, \frac{1}{2+q_{k-1}} \, (p_{k-1} - q_{k-1}) \end{aligned}$$

für $k = 2, 3, \ldots$. Da

$$\frac{p_k}{1+p_k} \leq 1, \quad \frac{2}{2+q_k} \leq 1, \quad \frac{1}{2+p_{k-1}} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2+q_{k-1}} \leq \frac{1}{2}$$

führt das zu der Abschätzung

$$|p_{k+1} - q_{k+1}| \leq 2^{-2} |p_{k-1} - q_{k-1}| \tag{6}$$

für $k = 2, 3, \ldots$. Bezeichnen wir $k+1$ als k, so nimmt die Abschätzung (**??**) die Gestalt

$$|p_k - q_k| \leq 2^{-2} |p_{k-2} - q_{k-2}| \tag{7}$$

an, $k = 3, 4, \ldots$. Wenden wir die Abschätzung (**??**) erneut auf sich selbst an, so erhalten wir

$$|p_k - q_k| \leq 2^{-2} |p_{k-2} - q_{k-2}| \leq 2^{-4} |p_{k-4} - q_{k-4}| \tag{8}$$

für $k = 5, 6, \ldots$. Allgemein finden wir

$$|p_k - q_k| \leq 2^{-2l} |p_{k-2l} - q_{k-2l}| \tag{9}$$

für $1 + 2l \leq k$. Es sei k eine gerade Zahl, d.h. $k = 2m$. Dann ergibt sich für $l = m - 1$, $m = 2, 3, \ldots$, die Ungleichung

$$|p_{2m} - q_{2m}| \leq 2^{-2(m-1)} |p_2 - q_2|. \tag{10}$$

Ist k eine ungerade Zahl, d.h. $k = 2m+1$, so finden wir für $l = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$, die Abschätzung

$$|p_{2m+1} - q_{2m+1}| \leq 2^{-2m} |p_1 - q_1|. \tag{11}$$

Da aber $p_1 = q_1 = 1$, folgt aus (**??**) $p_{2m+1} = q_{2m+1}$ für $m = 1, 2, \ldots$. Somit bleibt nur der Fall (**??**) zu betrachten. Da $p_2 = 3/2$ und $q_2 = 4/3$ ergibt sich $p_2 - q_2 = 1/6$. Dies führt zu der Abschätzung

$$|p_{2m} - q_{2m}| \leq 2^{-2(m-1)} \frac{1}{6}. \tag{12}$$

Aus (**??**) folgt aber augenblicklich, daß $< p_{2m} - q_{2m} >$ eine Nullfolge ist. Folglich ist auch $< p_k - q_k >$ eine Nullfolge. $\square$

3.4 Beweisen Sie, daß die Multiplikation von komplexen Zahlen kommutativ ist, d.h., es gilt

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

3.5 Beweisen Sie, daß die Ungleichung

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

besteht.