

A U F G A B E N “A N A L Y S I S”

8. Vorlesung

8.1 Seien $f(x) = \sqrt{x}$, $\text{dom}(f) = (0, 5)$, and $g(x) = x^2 - 4$, $\text{dom}(g) = (0, 3)$. Man bestimme $\text{dom}(f \circ g)$.

8.2 Man gebe jeweils eine unendliche Teilmenge von \mathbb{R} an,

- (i) in der jeder Punkt ein Häufungspunkt ist,
- (ii) die keinen Häufungspunkt hat,
- (iii) die nur aus isolierten Punkten besteht, aber einen Häufungspunkt hat.

8.3 Man bestimme die Menge aller Häufungspunkte von

- (i) $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right)$,
- (ii) $B := \left\{x \in \mathbb{R} : x = n + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

8.4 Seien $f(x) := \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, und $g(x) := \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$, $\text{dom}(g) = \overline{\mathbb{R}_+} \setminus \{1\}$, $\overline{\mathbb{R}_+} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Man beweise

- (1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2}$.

8.5 Man berechne die folgenden Grenzwerte:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}\right)$.