

A U F G A B E N “A N A L Y S I S”

9. Vorlesung

9.1 Zeigen Sie, daß

$$9.1.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} a^x = +\infty,$$

$$9.1.2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

$$9.1.3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)^p}{x^\alpha} = 0, \quad p > 0, \alpha > 0,$$

$$9.1.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

$$9.1.5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \quad r \in \mathbb{Q}_+,$$

$$9.1.6 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(x))^{\frac{1}{x}} = 1.$$

9.7 Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

$$9.7.1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$9.7.2 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

$$9.7.3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 5} \right).$$

9.8 Man zeige, daß die Funktion $f(x) := \sqrt{x^2 + c}$, $c > 0$, $x \in \mathbb{R}$, stetig ist.

9.9 Es sei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ und $f(x) := x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$.

9.9.1 Man skizziere f .

9.9.2 Man zeige, daß an jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ der links- und rechtseitige Grenzwert von f existiere.

9.9.3 An welchen Punkten ist f stetig und an welchen unstetig?

9.10 Man zeige, daß die Funktion $f(x) := \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$, gleichmäßig stetig ist und die Funktion $g(x) := x^2 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, nicht gleichmäßig stetig ist.