A U F G A B E N "A N A L Y S I S"

12. Vorlesung

12.1 Finden Sie die folgenden Ableitungen:

12.1.1 $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ für die Funktion $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, $x \in \mathbb{R}$,

Lösung: Wir finden $f'(x) = (x-2)^2(x-3)^3 + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$, woraus folgt $f'(1) = -8$, $f'(2) = f'(3) = 0$. □

12.1.2 $f'(2)$ für die Funktion $f(x) = x^2 \sin(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: Wir finden $f'(x) = 2x\sin(x-2) + x^2\cos(x-2)$, woraus $f'(2) = 4$ folgt. □

12.2 Bestimmen Sie die Ableitungen nach x der folgenden Funktionen:

12.2.1 $f(x) = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$,

Lösung: $f'(x) = 10a^3x - 5x^4$. □

12.2.2 $f(x) = \frac{ax+b}{a+b}$, $x, a, b \in \mathbb{R}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{a}{b+a}$. □

12.2.3 $f(x) = (x\sin(\alpha) + \cos(\alpha))(x\cos(\alpha) - \sin(\alpha))$, $x, \alpha \in \mathbb{R}$,

Lösung: $f'(x) = \sin(a)((x\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) + (x\sin(\alpha) + \cos(\alpha))\cos(\alpha)$
$= x\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha)$. □

12.2.4 $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, $x \geq 0$,

Lösung: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right\} \left\{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right\}$. Daraus folgt

$$f'(x) = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}, \tag{1}$$

$x \geq 0$. □

12.2.5 $f(x) = \tan(x) - \frac{1}{3}\tan^3(x) + \frac{1}{5}\tan^5(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

Lösung: $f'(x) = 1 + (\tan(x))^6$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. □

12.2.6 $f(x) = e^x(1 + \cot(x/2))$, $x \in \mathbb{R}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{e^x(\sin(x)-\cos(x))}{2(\sin(x/2))^2}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. □

12.2.7 $f(x) = \ln(\ln(\ln(x)))$, $x \geq 0$,

Lösung: $f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}$, $x > e$. □

12.2.8 $f(x) = e^x + e^{(e^x)} + e^{(ee^x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: $f'(x) = e^x + e^x e^{(e^x)} + ee^x e^{(ee^x)} = e^x \left\{1 + e^{(e^x)} + ee^{(ee^x)}\right\}$. □

12.3 Es sei $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq x_0 \\ ax + b & x > x_0 \end{cases}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Wie müssen die Koeffizienten a und b gewählt werden, damit die Funktion f in x_0 differenzierbar ist?

Lösung: Die Funktion f muß an der Stelle x_0 stetig sein und die links- und rechtsseitigen Ableitungen an der Stelle x_0 müssen gleich sein. Aus der Stetigkeit folgt $x_0^2 = ax_0 + b$. Aus der Gleichheit der links- und rechtsseitigen Abbleitungen folgt $2x_0 = a$. Folglich finden wir, daß die Funktion stetig ist, wenn $a = x_0$ und $b = 0$. □

12.4 Ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1 + x) & x \geq 0 \end{cases}$ differenzierbar für jedes $x \in \mathbb{R}$?

Lösung: Es ist leich zu sehen, daß die Funktion f stetig ist, auch bei $x = 0$. Die Funktion f ist für $x \neq 0$ differenzierbar. Die linkseitige Ableitung bei $x = 0$ ist $f'(0 - 0) = 1$. Die rechtsseitige Ableitung bei $x = 0$ ist $f'(0 + 0) = 1$. Beide Ableitungen stimmen überein. Damit ist die Funktion überall differenzierbar. □

12.5 Man bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

12.5.1 $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$, $x \neq \pm 1$. □

12.5.2 $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. □

12.5.3 $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$, $x \neq \pm 1$. □

12.5.4 $\quad f(x) = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$, $x \neq 1$. $\square$

12.5.5 $\quad f(x) = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^p}$, $p \in \mathbb{R}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{(1-x)^{p-1}[(p+q)+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$, $x \neq -1$. $\square$

12.5.6 $\quad f(x) = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$, $x \neq \sqrt[3]{-3}$. $\square$

12.5.7 $\quad f(x) = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$,

Lösung: $f'(x) = \frac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$, $x \neq \pm 1$. $\square$

12.5.8 $\quad f(x) = \sin^n(x)\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$,

Lösung: $f'(x) = n(\sin(x))^{n-1}\cos((n+1)x)$. $\square$

12.5.9 $\quad f(x) = \ln(\tan(x/2))$.

Lösung: $f'(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $0 < x - 2k\pi < \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $\square$