A U F G A B E N "A N A L Y S I S"

8. Vorlesung

8.1 Seien $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathrm{dom}(f) = (0, 5)$, and $g(x) = x^2 - 4$, $\mathrm{dom}(g) = (0, 3)$. Man bestimme $\mathrm{dom}(f \circ g)$.

Lösung: Es muß gelten: $\mathrm{ran}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Wir haben folglich zu betrachten $0 < x^2 - 4 < 5$, woraus folgt $4 < x^2 < 9$. Aus dieser Ungleichung erhalten wir $2 < x < 3$ und $-3 < x < -2$. Da aber auch $x \in \mathrm{dom}(g)$ gelten muß, folgt $x \in (2, 3)$, d.h., $\mathrm{dom}(f \circ g) = (2, 3)$.

8.2 Man gebe jeweils eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ an,

(i) in der jeder Punkt ein Häufungspunkt ist,

Lösung: z.B. ein offenes oder abgeschlossenes Intervall, $\mathbb{Q}$

(ii) die keinen Häufungspunkt hat,

Lösung: $\mathbb{N}$,

(iii) die nur aus isolierten Punkten besteht, aber einen Häufungspunkt hat.

Lösung: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{1}{n}\}$

8.3 Man bestimme die Menge aller Häufungspunkte von

(i) $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right)$,

Lösung: $[0, 2]$

(ii) $B := \left\{x \in \mathbb{R} : x = n + \frac{1}{m},\ n.m \in \mathbb{N}\right\}$.

Lösung: $\mathbb{N}$

8.4 Seien $f(x) := \frac{x^2-4x+3}{2x-6}$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, und $g(x) := \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$, $\mathrm{dom}(g) = \overline{\mathbb{R}_+} \setminus \{1\}$, $\overline{\mathbb{R}_+} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Man beweise

(1) $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$,

Lösung: Es gilt

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6} = \frac{(x-3)(x-1)}{2(x-3)} = \frac{x-1}{2}, \qquad x \neq 3. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x-1}{2} = 1. \tag{2}$$

(2) $\lim_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{2}$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} && (3)\\ &= \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} && (4)\\ &= \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}, \quad x \neq 1. && (5) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

8.5 Man berechne die folgenden Grenzwerte:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$,

Lösung: Wir finden

$$\begin{aligned} &\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} && (7)\\ &\quad = \frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x(1+\sqrt{1-x^2})} && (8)\\ &\quad = \frac{x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})} && (9)\\ &\quad = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq 0. && (10) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = 0. \tag{11}$$

(2) $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

Lösung: Wir benutzen die Darstellung

$$x^n - a^n = (x-a) \sum_{k=1}^{(n-1)} x^k a^{n-1-k}, \qquad n = 2, 3 \ldots . \tag{12}$$

Daraus folgt

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{n-1} x^k a^{n-1-k} = na^{n-1}. \tag{13}$$

(3) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2+1}\right)$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2+1} && (14)\\
&\quad = \frac{(\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x+1} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3x+1} + \sqrt{x^2+1}} && (15)\\
&\quad = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1} + \sqrt{x^2+1}} && (16)\\
&\quad = \frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}. && (17)
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{x^2+1}\right) = \frac{3}{2}. \tag{18}$$