A U F G A B E N “A N A L Y S I S”

9. + 10. Vorlesung

9.1 Zeigen Sie, daß

9.1.1 $\lim_{x\to 0} a^x = 1,\ a > 0,$

Lösung: Da gilt $a^x = e^{x\ln(a)}$ finden wir

$$\lim_{x\to 0} a^x = e^{\lim_{x\to 0} x\ln(a)} = e^0 = 1. \tag{1}$$

9.1.2 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$

Lösung: Es gilt

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x), \quad 0 < x\frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Daraus folgt

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Da offensichtliche $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$, erhalten wir $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

9.1.3 $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))^p}{x^\alpha} = 0,\ p > 0,\ \alpha > 0,$

Lösung: Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C_\epsilon > 0$, so daß $\ln(x) \leq C_\epsilon x^\epsilon$ für $x \geq 1$. Wir wählen ein ϵ, so daß $p\epsilon < \alpha$. Daraus folgt die Abschätzung

$$\frac{(\ln(x))^p}{x^\alpha} \leq C_\epsilon \frac{x^{p\epsilon}}{x^\alpha} = C_\epsilon \frac{1}{x^{\alpha - p\epsilon}}, \quad x \geq 1. \tag{4}$$

. Diese Abschätzung beweißt die Aussage.

9.1.4 $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0,$

Lösung: Es gilt

$$|x\sin(\frac{1}{x})| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \tag{5}$$

woraus die Aussage folgt.

9.1.5 $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r,\ r \in \mathbb{Q}_+,$

Lösung: Es sei $r = \frac{p}{q}$. Dann gilt

$$(1+x)^{p/q} - 1 = ((1+x)^{1/q} - 1)\sum_{k=0}^{p-1}(1+x)^{k/q}. \tag{6}$$

Ferner, benutzen wir die Darstellung

$$x = \left((1+x)^{1/q}\right)^q - 1 = ((1+x)^{1/q} - 1)\sum_{l=0}^{q-1}(1+x)^{l/q}. \tag{7}$$

So finden wir

$$1 = \frac{(1+x)^{1/q} - 1}{x}\sum_{l=0}^{q-1}(1+x)^{1/q}. \tag{8}$$

Daraus folgt

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/q} - 1}{x}\lim_{x\to 0}\sum_{l=0}^{q-1}(1+x)^{1/q} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/q} - 1}{x}q \tag{9}$$

oder

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/q} - 1}{x} = \frac{1}{q}. \tag{10}$$

Zusammen mit (**??**) erhalten wir das geforderte Resultat.

9.1.6 $\lim_{x\to\infty}(\ln(x))^{\frac{1}{x}} = 1.$

Lösung: $\lim_{x\to\infty}(\ln(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x))}{x}} = e^0 = 1.$

9.2 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

9.2.1 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x}$, $a\in\mathbb{R}$,

Lösung: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = a.$

9.2.2 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$,

Lösung: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = 1.$

9.2.3 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$,

Lösung: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} = 0.$

9.2.4 $\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos(x))^n}{x}$, $n\in\mathbb{N}$,

Lösung: $\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos(x))^n}{x} = 0.$

9.2.5 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{\sin(x)}$,

Lösung: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{\sin(x)} = 1.$

9.2.6 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x}$,

Lösung: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin(\sin(x)))}{x} = 1$.

9.2.7 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Lösung: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$.

9.3 Man zeige, daß die Funktion $f(x) := \sqrt{x^2+c}$, $c > 0$, $x \in \mathbb{R}$, stetig ist.

Lösung: Wir haben $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, zu verifizieren. Wir benutzen die Darstellung

$$f(x) - f(x_0) = \sqrt{x^2+c} - \sqrt{x_0^2+c} = \frac{x^2 - x_0^2}{\sqrt{x^2+c}\sqrt{x_0^2+c}}. \tag{11}$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{1}{c}|x^2 - x_0^2|. \tag{12}$$

Aus $\lim_{x\to x_0} = x_0^2$ folgt die Stetigkeit.

9.4 Es sei $[x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ und $f(x) := x - [x]$, $x \in \mathbb{R}$.

9.4.1 Man skizziere f.

9.4.2 Man zeige, daß an jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ der links- und rechtseitige Grenzwert von f existiere.

Lösung: Es gilt

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \\ 1 & x_0 \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{13}$$

und

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \\ 0 & x_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}. \tag{14}$$

9.4.3 An welchen Punkten ist f stetig und an welchen unstetig?

Lösung: Aus (9.4.2) folgt, daß die Funktion $f(x)$ nur unstetig in den Punkten $\mathbb{Z}$ ist.

9.5 Man zeige, daß die Funktion $f(x) := \frac{1}{x^2+2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$, gleichmäßig stetig ist und die Funktion $g(x) := x^2 + 2x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, nicht gleichmäßig stetig ist.

Lösung: Wurde in der Übung vorgeführt.