Übung 4

Übungsaufgaben für den 21. Januar 2002

Bei Fragen besteht jederzeit die Möglichkeit, sich an den zuständigen wissenschaftlichen Mitarbeiter, Bernhard Kaiser (Raum A2.11), zu wenden. (Tel. (0331) 5509-158, email: bernhard.kaiser@hpi.uni-potsdam.de.

Aufgabe 1 - Fehlerbaumanalyse

Ein Automobilhersteller hat eine Vielzahl von Motorschäden aus der Vergangenheit untersucht. Als wichtiges Risiko für den Motor wurde das Fahren mit zu wenig Öl ermittelt. Ihre Aufgabe ist nun, mit einem (qualitativen) Fehlerbaum zu analysieren, wie es zu dieser Situation kommen kann. Mögliche Einflüsse wurden bereits in einem Brainstorming ermittelt, die Zusammenhänge dazwischen müssen Sie selbst erkennen.

Einflüsse:

1. Fahrer füllt Öl nicht regelmäßig nach
2. Undichtigkeit verursacht Ölverlust
3. Ölstand vor Fahrtantritt nicht kontrolliert
4. Öldruck-Kontrolllampe defekt
5. Messfühler für Kontrolllampe defekt
6. Fahrer ignoriert Kontrolllampe

Zeichnen Sie den Fehlerbaum. Gruppieren Sie die Ereignisse so, dass die Wirkungskette möglichst gut verständlich ist und bezeichnen Sie auch Zwischenterme.

Aufgabe 2 - Zuverlässigkeitsfunktion

Zeigen Sie, dass bei exponentialverteiltem Ausfallverhalten mit der konstanten Ausfallrate λ (also Überlebenswahrscheinlichkeit $R(t) = e^{-\lambda t}$) die mittlere Zeit bis zum Ausfall (MTTF) gleich dem Kehrwert der Ausfallrate λ (also $1/\lambda$) ist!

Empfohlen ist dabei folgende Argumentationskette:

1. Sie haben eine große Grundgesamtheit von n Elementen. Wenn nun die Überlebenswahrscheinlichkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_i = R(t_i)$ ist, wieviele der noch vorhandenen Elemente fallen dann wohl in einem kleinen Zeitintervall der Breite Δt nach dem Zeitpunkt t_i aus? (Sie müssen den Ausdruck R(t) jetzt noch nicht durch die tatsächliche Funktion ersetzen.) Ergebnis: $A(t) = n * (R(t_i) - R(t_i) + \Delta t)$
2. Sie teilen nun den ganzen Zeitraum von $t = 0$ bis $t = \infty$ in lauter äquidistante Zeitintervalle der Breite Δt mit der jeweiligen linken Grenze t_0 , t_1 , t_2 usw. ein (zum Verständnis ist eine Skizze sinnvoll!). Wie berechnet

man die auf dieser Diskretisierung basierende Näherung MTTF' für MTTF?

Ergebnis: MTTF' = $\frac{\sum_{i=0}^{\infty} t_i * n * \left(R(t_i) - R(t_i + \Delta t)\right)}{n}$

3. Nun lassen Sie die Breite von Δt gegen 0 laufen, um den exakten Wert MTTF zu berechnen. Was wird beim Grenzwertübergang aus dem ΔR = (R(t_i) - R(t_i)+ Δt), was wird aus der Summe?
4. Wenn Sie nun für R(t) die gegebene Überlebenswahrscheinlichkeit einsetzen, können Sie die MTTF ausrechen. Die Stammfunktion von t*$e^{-\lambda t}$ lautet $\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}(-\lambda t - 1)$.

Zusatzfrage: Es scheint auf den ersten Blick so, dass zum Zeitpunkt der mittleren Ausfallzeit (MTTF) die Zuverlässigkeit genau 50% beträgt. Kommentieren Sie diese Vermutung!

Aufgabe 3 - Zuverlässigkeitsblockdiagramm

An einem PKW ist die rückwärtige Beleuchtung wie folgt verschaltet: Von der Stromversorgung (Batterie) fließt der Strom über ein Relais, das für beide Rücklichter gemeinsam als Schalter dient, weiter über je eine Sicherung zum jeweils rechten bzw. linken Rücklicht und dann über die Masse (Fahrzeugkarrosserie) zurück.

Die Stromversorgung an sich fällt nicht aus (zumindest nicht während der Fahrt, weil diese sonst auch beendet wäre...), auch den Leitungen passiert in dieser Übung nichts. Für die folgenden Bauelemente sind jedoch Ausfälle zu berücksichtigen, die statistisch unabhängig und den angegebenen Wahrscheinlichkeitsverläufen der Zuverlässigkeit über die Zeit führen:

Für jede Glühlampe gilt: $R_G(t) = e^{-t / 10a}$
Für jede Sicherung gilt: $R_S(t) = e^{-t / 20a}$
Für das gemeinsame Schaltrelais gilt: $R_R(t) = e^{-t / 100a}$

Sie sind interessiert an der Zuverlässigkeit der Beleuchtung insgesamt, also der Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Lampe leuchtet. Eine Reparatur findet bei Ausfall nicht statt. Darzustellen ist ein Zeitraum von 10 Jahren.

a) Zeichnen Sie ein Prinzipschaltbild für die Beleuchtungsanlage!
b) Zeichnen Sie ein Zuverlässigkeitsblockdiagramm für das System!
c) Stellen Sie zunächst allgemein die Gesetzmäßigkeiten auf, für das sich die Zuverlässigkeitsfunktion der Beleuchtung auf einer Seite $R_{Seite}(t)$ sowie der gesamten Rückbeleuchtung $R_{Ges}(t)$ aus den gegebenen Funktionen errechnen lässt (Hinweis: Zur Vereinfachung kann das Wissen über die Symmetrie ausgenutzt werden)!

d) Berechnen und zeichnen Sie die Zuverlässigkeitsfunktion zunächst für die Betriebsfähigkeit der Rückleuchte einer Seite!
e) Berechnen und zeichnen Sie die Zuverlässigkeitsfunktion für die Beleuchtung insgesamt, also dass mindestens eine Leuchte betriebsfähig ist!

Aufgabe 4 – Markov-Analyse

Die Pumpstationen eines Wasserversorgungsunternehmens sind so aufgebaut, dass sich in jeder Station zwei Pumpen im Dauerbetrieb die Arbeit teilen. Die Pumpen sind so dimensioniert, dass jede Pumpe bei Ausfall ihres Gegenstücks kurzzeitig die gesamte Pumpleistung erbringen kann, was allerdings auf Kosten des Verschleißes geht.

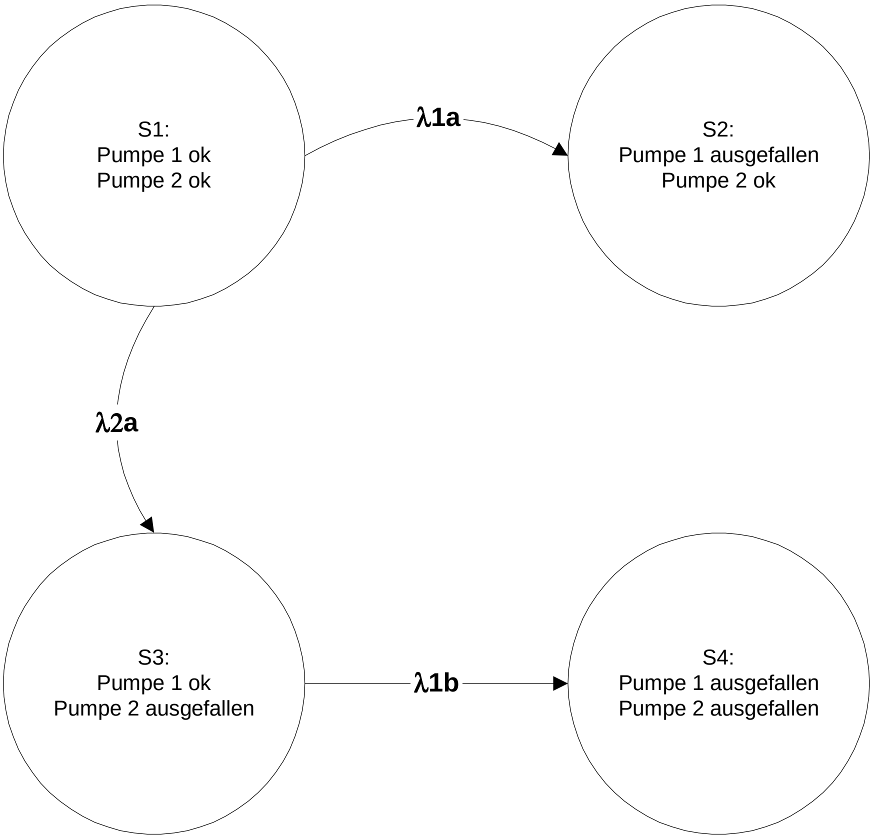
Nach langjähriger Beobachtung vieler Pumpstationen ist bekannt, dass beim Betrieb beider Pumpen mit Halblast die Pumpen unabhängig voneinander mit konstanter Ausfallrate exponentialverteilt ausfallen. So wäre ohne Reparatur von einem Anfangsbestand nach $T_{1/2\ a}$ = 1,386 Jahren nur noch die Hälfte der Pumpen lauffähig. Muss eine Pumpe mit Vollast arbeiten, da ihr Gegenstück bereits ausgefallen ist, so beträgt diese Halbwertszeit sogar nur $T_{1/2\ b}$ = 0,347 Jahre.

Natürlich werden ausgefallene Pumpen umgehend von einem Kundendienst repariert, der eine konstante Reparaturrate von μ = 1a gewährleistet (NB: Dazu muss er sich flexibel dem Bedarf anpassen, denn würde er einfach eine bestimmte Anzahl Pumpen pro Zeiteinheit schaffen, wäre das keine konstante Rate!). Trifft der Kundendienst erst nach Ausfall beider Pumpen ein, so repariert er natürlich gleich beide, was an der Reparaturrate nichts ändert.

Im folgenden wird eine solche Pumpenstation in ihrem statistischen Ausfallverhalten betrachtet.

a) Vervollständigen Sie die Pfeile in untenstehendem Zustandsdiagramm und bezeichnen Sie jeden eindeutig (gleiche Bezeichnungen für Größen, die lt. Aufgabenstellung gleich sind)!
b) Berechnen Sie die fehlenden Ausfallraten λ_i mit den Angaben der Aufgabenstellung!
c) Stellen Sie ein Differentialgleichungssystem für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten in allen Zuständen S1 - S4 auf!
d) Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten als Funktion über die Zeit für alle 4 Zustände!
e) Wie sind die Limites für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach unendlich langer Zeit (eingeschwungener Zustand)?

Übung 4


S1:
Pumpe 1 ok
Pumpe 2 ok
λ1a
S2:
Pumpe 1 ausgefallen
Pumpe 2 ok
λ2a
S3:
Pumpe 1 ok
Pumpe 2 ausgefallen
λ1b
S4:
Pumpe 1 ausgefallen
Pumpe 2 ausgefallen