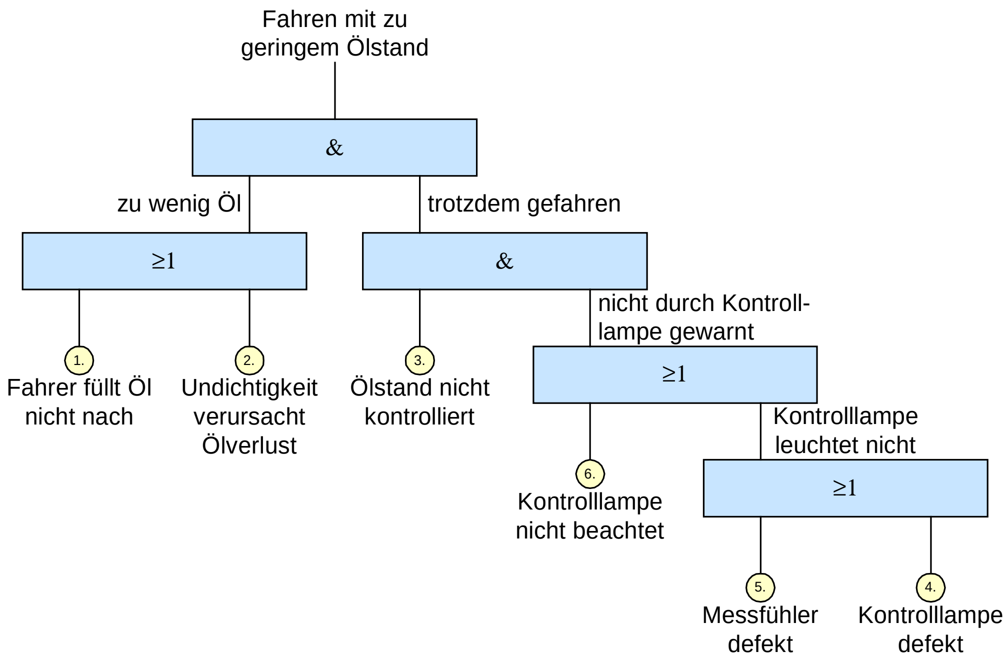
Aufgabe 1

Die zum Ausfall führenden Ursachen:

1. Fahrer füllt Öl nicht regelmäßig nach
2. Undichtigkeit verursacht Ölverlust
3. Ölstand vor Fahrtantritt nicht kontrolliert
4. Öldruck-Kontrolllampe defekt
5. Messfühler für Kontrolllampe defekt
6. Fahrer ignoriert leuchtende Kontrolllampe

Der Ausfall des Fahrzeugs kann nur dadurch zustande kommen, dass Öl fehlt und trotzdem gefahren wird. Der Ölmangel wiederum entsteht entweder durch vergessenes Nachfüllen (1.) oder eine Undichtigkeit (2.). Wenn die Fahrt angetreten wird, dann wurde der Fahrer nicht gewarnt und er hat den Ölstand nicht kontrolliert (3.). Die fehlende Warnung kann als Ursache haben, dass sie schlichtweg ignoriert wird (6.) oder tatsächlich nicht leuchtet. Letzteres beruht entweder auf einer defekten Lampe (4.) oder einem defekten Messfühler (5.). Als Fehlerbaum hat das Problem die Gestalt:



Aufgabe 2

Zu einem Zeitpunkt t_i beträgt die Wahrscheinlichkeit für ein ordnungsgemäßes Funktionieren $R(t_i)$. Wenn mehrere Bauteile gegeben sind, z.B. n, dann sind davon noch $n \cdot R(t_i)$ in Ordnung. Zu einem späteren Zeitpunkt können weitere Bauteile ausgefallen sein:

$$R(t_i + \Delta t) \leq R(t_i)$$

Bezogen auf die Anzahl funktionstüchtiger Bauteile:

$$n \cdot R(t_i + \Delta t) \leq n \cdot R(t_i)$$

Die Anzahl A der in der Zwischenzeit ausgefallenen Teile ist:

$$\begin{aligned} A(t_i, t_i + \Delta t) &= n \cdot R(t_i) - n \cdot R(t_i + \Delta t) \\ &= n \cdot \left(R(t_i) - R(t_i + \Delta t)\right) \\ &= n \cdot \left(-\Delta R(t_i)\right) \end{aligned}$$

Um die MTTF (Mean Time To Failure) zu erhalten, bestimmt man das arithmetische Mittel der Ausfallzeiten aller Bauteile.

$$\begin{aligned} MTTF' &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t_i \cdot A(t_i, t_{i+1} - t_i) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t_i \cdot A(t_i, \Delta t) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} t_i \cdot n \cdot \left(-\Delta R(t_i)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} t_i \cdot \left(-\Delta R(t_i)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} -t_i \cdot \Delta R(t_i) \end{aligned}$$

Die Erweiterung mit Δt liefert unter Benutzung der Definition des limes:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R(t)}{\Delta t} &= \frac{dR(t)}{dt} \\ &= R'(t) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} -t_i \cdot \frac{\Delta R(t_i)}{\Delta t} \cdot \Delta t = \int_0^{\infty} -t \cdot R'(t)\, dt$$

Die Funktion R ist bekannt, ihre Ableitung daher sofort ermittelbar:

$$\begin{aligned} R(t) &= e^{-\lambda t} \\ R'(t) &= -\lambda \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setze ich in das Integral ein:

$$\int_0^\infty -t \cdot R'(t)dt$$
$$= \int_0^\infty -t \cdot \left(-\lambda \cdot e^{-\lambda t}\right)dt$$
$$= \lambda \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-\lambda t}\, dt$$

Da Integral von $t \cdot e^{-\lambda t}$ war in der Aufgabenstellung bereits gegeben:

$$= \lambda \cdot \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \cdot (-\lambda \cdot t - 1)\right]_0^\infty$$
$$= \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \cdot (-\lambda \cdot t - 1)\right]_0^\infty$$
$$= \left|-\frac{1}{\lambda}\right|$$
$$= \frac{1}{\lambda}$$

Genau dieses Resultat sollte gezeigt werden.

Zusatzaufgabe

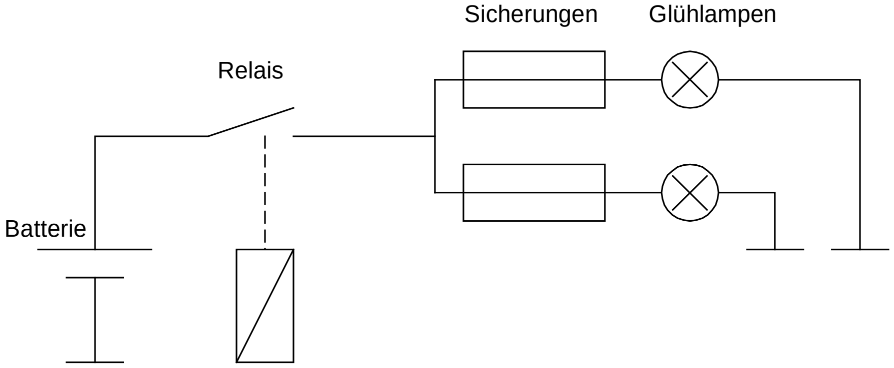
Für die MTTF gilt:

$$MTTF = \frac{1}{\lambda}$$
$$R(MTTF) = e^{-\lambda \cdot MTTF}$$
$$= e^{-\frac{\lambda}{\lambda}}$$
$$= e^{-1}$$
$$\approx 0,36788$$

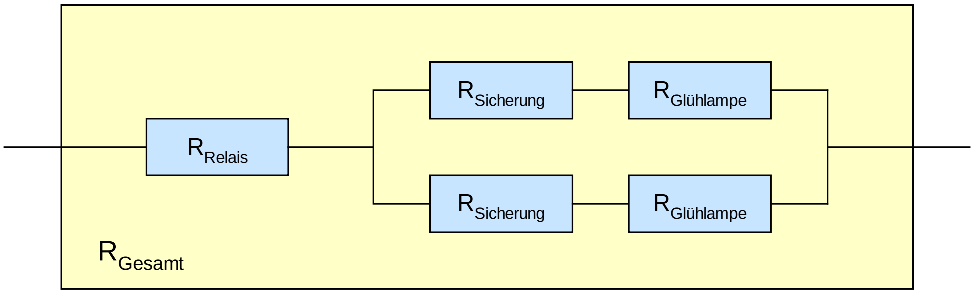
Nur noch knapp 37% aller Bauteile sind zum Zeitpunkt MTTF funktionstüchtig, d.h. deutlich weniger als 50%, wie die ursprüngliche Vermutung war. Der Grund liegt darin, dass MTTF auf dem arithmetischen Mittel beruht und durch sehr langlebige Bauteile stark verfälscht wird.

Aufgabe 3

a)



b)



c) Eine einzelne Fahrzeugseite hat bzgl. der Beleuchtung eine Wahrscheinlichkeit, die lediglich der Reihenschaltung von Relais, Sicherung und Glühlampe entspricht:

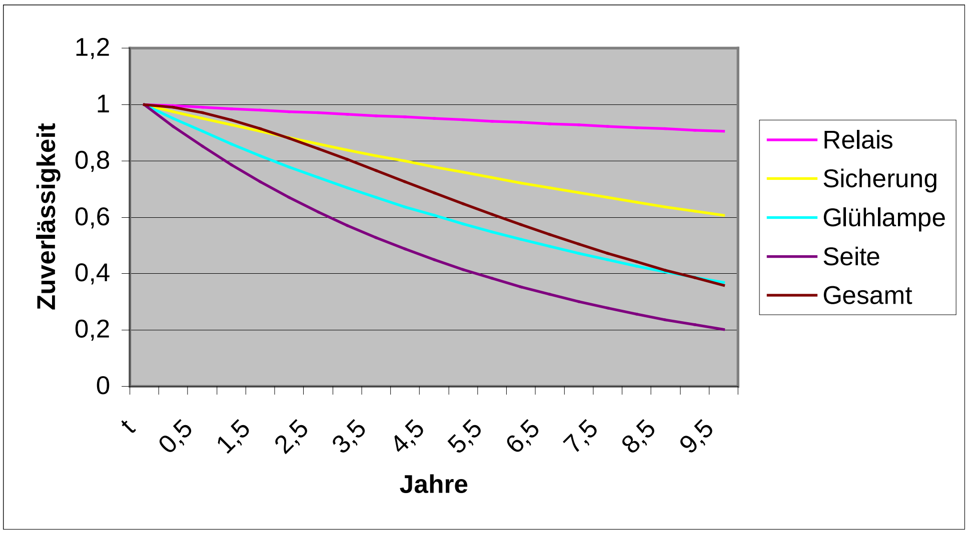
$$R_{Seite}(t) = R_{Relais}(t) \cdot R_{Sicherung}(t) \cdot R_{Glühlampe}(t)$$

Für die Gesamtbeleuchtung muss beachtet werden, dass die Fahrzeugseiten das Relais gemeinsam nutzen, ansonsten aber parallel verschalten sind:

$$R_{Sicherung+Glühlampe}(t) = R_{Sicherung}(t) \cdot R_{Glühlampe}(t)$$

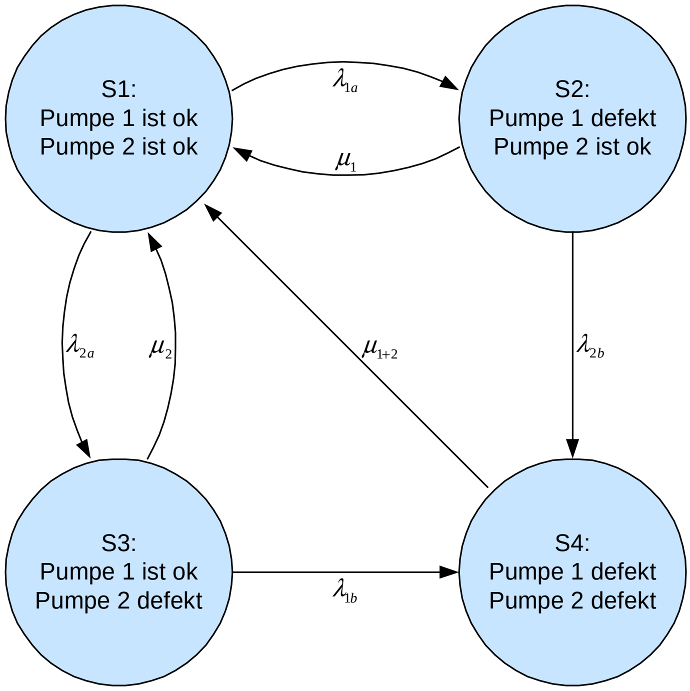
$$\begin{aligned} R_{Gesamt}(t) &= R_{Relais}(t) \cdot \left(1 - \left(1 - R_{Sicherung+Glühlampe}(t)\right)^2\right) \\ &= R_{Relais}(t) \cdot \left(2 \cdot R_{Sicherung+Glühlampe}(t) - R_{Sicherung+Glühlampe}(t)^2\right) \\ &= R_{Relais}(t) \cdot \left(2 \cdot R_{Sicherung}(t) \cdot R_{Glühlampe}(t) - R_{Sicherung}(t) \cdot R_{Glühlampe}(t)^2\right) \end{aligned}$$

d+e) In Excel kann man die Datenreihen schnell berechnen lassen, das dazugehörige Diagramm zeigt, dass bereits nach ca. 7 Jahren mit 50% Wahrscheinlichkeit das Licht komplett ausgefallen ist:



Aufgabe 4

a) Das Zustandsdiagramm:



Ich halte es für sinnvoll, an dieser Stelle gleich die Feststellung zu treffen, dass beide Pumpen identisch aufgebaut sind, ihre Ausfallswahrscheinlichkeiten sich demzufolge gleichen:

$$\lambda_{1a} = \lambda_{2a} = \lambda_a$$
$$\lambda_{1b} = \lambda_{2b} = \lambda_b$$

Ebenso soll die Reparaturrate laut Aufgabenstellung stets konstant sein:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_{1+2}$$

b) Bekannt ist der Zeitpunkt, an dem die Hälfte der Pumpen ausfällt (statistisch gesehen), damit kann man λ bestimmen:

$$e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} = 50\%$$
$$\ln e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} = \ln \frac{1}{2}$$
$$-\lambda \cdot T_{1/2} = -\ln 2$$
$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Für den ersten Ausfall einer Pumpe:

$$T_{1/2a} = 1{,}386\, a$$
$$\lambda_a = 0{,}5\, a^{-1}$$

Die zweite fällt dann aufgrund der hohen Last schneller aus:

$$T_{1/2b} = 0{,}347a$$
$$\lambda_b = 2\,a^{-1}$$

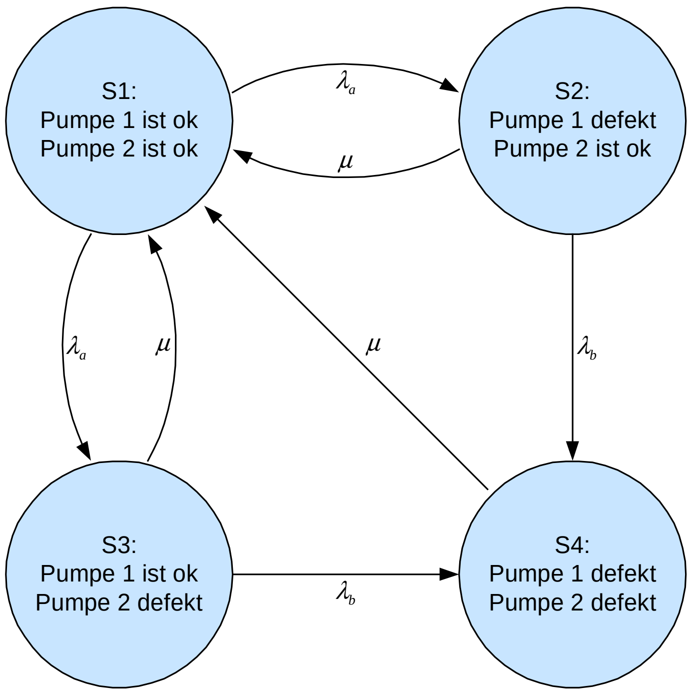
c) Das Gesamtsystem muss sich stets in genau einem der 4 Zustände befinden:

$$P_1(t)+P_2(t)+P_3(t)+P_4(t)=1$$

Aufgrund der vorhin getroffenen Feststellung, dass beide Pumpen identisch aufgebaut sind, kann man vereinfachen:

$$P_2(t)=P_3(t)$$
$$P_1(t)+2\cdot P_2(t)+P_4(t)=1$$

Aus dem Zustandsdiagramm sind die restlichen Gleichungen ablesbar:



$$P_1{}'(t)=2\mu\cdot P_2(t)+\mu\cdot P_4(t)-2\lambda_a\cdot P_2(t)$$
$$P_2{}'(t)=\lambda_a\cdot P_1(t)-(\mu\cdot P_2(t)+\lambda_b\cdot P_2(t))$$
$$=\lambda_a\cdot P_1(t)-(\mu+\lambda_b)\cdot P_2(t)$$
$$P_4{}'(t)=2\lambda_b\cdot P_2(t)-\mu\cdot P_4(t)$$