Aufgabe 1

Ich kürze intakt mit *i* und defekt mit *d* ab. Um Verwirrung zu vermeiden, benenne ich den Laufindex *i* in *k* um.

$$\Omega = \{\{d,d,d,...,d\},\{i,d,d,...,d\},\{i,i,d,...,d\},\{i,d,i,...,d\},...,\{i,i,i,...,i\}\}$$
$$\#\Omega = 2^n$$

$$A_k = \{\{d,d,d,...,i,...,d\},\{i,d,d,...,i,...,d\},\{i,i,d,...,i,...,d\},\{i,d,i,...,i,...,d\},...,\{i,i,i,...,i,...,i\}\}$$
$$\#A_k = 2^{n-1}$$

$$B = \{\{i,i,i,...,i\}\}$$
$$\#B = 1$$

$$C = \{\{i,d,d,...,d\},\{i,i,d,...,d\},\{i,d,i,...,d\},...,\{i,i,i,...,i\}\}$$
$$\#C = 2^n - 1$$

$$D = \{\{d,d,d,...,d\},\{i,d,d,...,d\},\{d,i,d,...,d\},\{d,d,i,...,d\},...,\{d,d,d,...,i\}\}$$
$$\#D = n+1$$

$$E = \{\{d,d,d,...,d\}\}$$
$$\#E = 1$$

Die Ereignisse B, C lassen sich mittels A_k darstellen, D, E dagegen nicht:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

$$C = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Lässt man die Komplementbildung zu, so sind auch D, E darstellbar:

$$E = C^C = \left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\}^C$$

$$D = E \cup \bigcup_{i<j} \{\{A_i \cup A_j\} \cap \{A_i \cap A_j\}\}$$

Aufgabe 2

Der Versuch besteht aus zwei voneinander unabhängigen Ziehungen. Jede hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\frac{5}{13}$ weiß und $\frac{8}{13}$ schwarz. Somit ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass beide Kugeln die gleiche Farbe $A = \{\{weiß, weiß\},\{schwarz, schwarz\}\}$ haben, von

$$P(A) = \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} + \frac{8}{13}\cdot\frac{7}{12} = \frac{20}{156} + \frac{56}{156} = \frac{76}{156} = \frac{19}{39} < \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 3

Die Ergebnismenge Ω besteht aus $1\cdot 6+2\cdot 5+3\cdot 4+4\cdot 3+5\cdot 2+6\cdot 1=56$ Elementen:
$\Omega=\{\{1,1,1\},\{1,1,2\},\ldots,\{1,1,6\},\{1,2,2\},\ldots,\{6,6,6\}\}$
Jedes Element darf in Ω nur einmal auftauchen, Permutationen eines Elementes sind nicht erlaubt. So ist $\{1,1,2\}$ das gleiche Ereignis wie $\{1,2,1\}$, da die Würfel nicht voneinander unterscheidbar sind.

Die Formel entstand aus der Überlegung: Die Eliminierung der Permutationen ist zuverlässig möglich, wenn ich fordere, dass für jedes Elementarereignis $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ die Beziehung $a_1\leq a_2\leq a_3$ gilt. Für $a_1=1$ gibt es $6+5+4+3+2+1$ Fälle, für $a_1=2$ nur noch $5+4+3+2+1$ usw. .

Verallgemeinert für beliebige Würfel (mit w Seitenflächen) 3ist $\#\Omega=\sum_{i=1}^{w}\sum_{j=i}^{w} j$

Die Summen der Augenzahlen 11 bzw. 12 entstehen bei den folgenden Teilmengen:

$$A_{11}=\{\{1,4,6\},\{1,5,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},\{3,3,5\},\{3,4,4\}\}$$
$$A_{12}=\{\{1,5,6\},\{2,4,6\},\{2,5,5\},\{3,3,6\},\{3,4,5\},\{4,4,4\}\}$$