**Aufgabe 1**

Die Chebyshev-Ungleichung hat die allgemeine Form:

$$P\left(\left|\overline{Y}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2}$$

Im vorliegenden Fall ist $\varepsilon=0{,}02$ und $\sigma=0{,}1$, es soll ein $n$ gefunden werden, für das $P\left(\left|\overline{Y}_n-\mu\right|<\varepsilon\right)>0{,}95$ gilt. Da man das kleinstmögliche $n$ sucht, ist $P\left(\left|\overline{Y}_{n_{\min}}-\mu\right|<\varepsilon\right)=0{,}95$:

$$0{,}95=1-\frac{\sigma^2}{n_{\min}\cdot\varepsilon^2}$$

$$0{,}05=\frac{0{,}1^2}{n_{\min}\cdot 0{,}02^2}$$

$$n_{\min}=\frac{0{,}1^2}{0{,}05\cdot 0{,}02^2}$$

$$n_{\min}=500$$

Es sind min. 500 getrennte Messungen vorzunehmen.

**Aufgabe 2**

Aus

$$\begin{aligned}E\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2 &= E\left(\left(X_i-\mu\right)-\left(\overline{X}_n-\mu\right)\right)^2\\ &= E\left(X_i-\mu\right)^2-2E\left(X_i-\mu\right)\left(\overline{X}_n-\mu\right)+E\left(\overline{X}_n-\mu\right)^2\\ &=\sigma^2-2\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}\\ &=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}\\ &=\sigma^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

folgt, dass

$$\tilde{s}_n^2(X)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2$$

$$\begin{aligned}E\tilde{s}_n^2(X)&=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i-\overline{X}_n\right)^2\\ &=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\\ &=\sigma^2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Für erwartungstreue Schätzer gilt, dass die Verzerrung $b_\vartheta(T)=0$ ist, somit

$$b_\vartheta(T)=E\tilde{s}_n^2(X_1)-\gamma(\vartheta)=0$$

gelten müsste.

Dass dem jedoch nicht so ist, zeige ich jetzt:

$$E\tilde{s}_n^2(X_1) - \gamma(\vartheta) = \sigma^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sigma^2$$
$$= -\frac{1}{n} \cdot \sigma^2$$

Dieser Term hat den Grenzwert Null, erreicht diesen aber nur im Unendlichen.

Für den mittleren quadratischen Fehler gilt:

$$MSE_\vartheta\, \tilde{s}_n^2 = Var\, \tilde{s}_n^2 + \frac{1}{n^2} \cdot \sigma^4$$
$$MSE_\vartheta\, s_n^2 = Var\left(\frac{n}{n-1} \cdot \tilde{s}_n^2\right) = \frac{n^2}{(n-1)^2} \cdot Var\, \tilde{s}_n^2$$

Es gilt $MSE_\vartheta\, \tilde{s}_n^2 \leq MSE_\vartheta\, s_n^2$ gdw. $2\sigma^4 + E\, s_n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} - 2\right) \leq 0$. Diese Gleichung muss man dann noch für jede einzelne Verteilung nachweisen, was aber immer gelingt. Somit ist $\tilde{s}_n^2$ stets zu bevorzugen.

**<u>Aufgabe 3</u>**

Die Verteilungsfunktion hat die Form $F(x) = P(X \leq x)$.
Allgemein wird die Gleichverteilung durch die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

gekennzeichnet. Die Grenzen $a$ und $b$ sind gegeben als $a = 0$ und $b = \vartheta$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{\vartheta} & x \in [0,\vartheta] \\ 1 & x > \vartheta \end{cases}$$

Für $F_{\max}(x) = P(\max(X_1, X_2) \leq x)$ müssen $X_1$ <u>und</u> $X_2$ kleiner als $x$ sein und es gilt aufgrund der Unabhängigkeit:

$$F_{\max}(x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x)$$
$$= P(X_1 \leq x) \cdot P(X_2 \leq x)$$
$$= \begin{cases} 0 & x_1 \leq 0 \text{ } oder \text{ } x_2 \leq 0 \\ \frac{x_1}{\vartheta} \cdot \frac{x_2}{\vartheta} & 0 < x_1, x_2 < \vartheta \\ \frac{x_1}{\vartheta} & 0 < x_1 < \vartheta,\ x_2 \geq \vartheta \\ \frac{x_2}{\vartheta} & 0 < x_2 < \vartheta,\ x_1 \geq \vartheta \\ 1 & sonst \end{cases}$$

Etwas anders berechnet sich $F_{\min}(x) = P(\min(X_1, X_2) \leq x)$:

$$\begin{aligned} P(x_{\min} \leq z) &= 1 - P(x_{\min} > z) \\ &= 1 - P(x_{\min} \geq z) \end{aligned}$$

Die letzte Herleitung beruht auf der Tatsache, dass es sich nicht um eine diskrete Verteilung handelt. Als nächstes kann man sich die Unabhängigkeit zunutze machen:

$$\begin{aligned} &= P(x_1 > z, x_2 > z) \\ &= 1 - P(x_1 > z) \cdot P(x_2 > z) \\ &= 1 - (1 - P(x_1 \leq z)) \cdot (1 - P(x_2 \leq z)) \\ &= 1 - (1 - F(z)) \cdot (1 - F(z)) \\ &= 1 - (1 - F(z))^2 \end{aligned}$$

$$F_{\min}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{\vartheta}\right)^2 & x \in [0, \vartheta] \\ 1 & x > \vartheta \end{cases}$$

Das Stichprobenmittel $E_\vartheta \overline{X}$ einer Gleichverteilung ist

$$E_\vartheta \overline{X} = \frac{a+b}{2}.$$

Wiederum ersetze ich $a$ und $b$

$$E_\vartheta \overline{X} = \frac{\vartheta}{2}.$$

Da das Stichprobenmittel erwartungstreu ist, kann man als erwartungstreue Schätzung für $\vartheta$ die Gleichung

$$\vartheta = 2 \cdot E_\vartheta \overline{X}$$

verwenden.

Es gibt aber noch andere Schätzer, so ist u.a. ( $f^{\max}$ sei die Dichte):

$$E\, x_{\max} = \int \xi \cdot f^{\max}(\xi)\, d\xi$$

Da bekanntermaßen

$$\begin{aligned} F^{\max}(v) &= \int_{-\infty}^{v} f^{\max}(\xi)\, d\xi \\ &= \begin{cases} 0 & v < 0 \\ \frac{v^2}{\vartheta^2} & 0 \leq v \leq 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

folgt unmittelbar

$$f^{\max}(v) = \begin{cases} 0 & v < 0 \\ \frac{2v}{\vartheta^2} & 0 \leq v \leq 1 \\ 1 & v > 1 \end{cases}$$

und damit

$$\begin{aligned}
E_{\vartheta_{\max}} &= \int_0^{\vartheta} \xi \cdot \frac{2\xi}{\vartheta^2}\, d\xi \\
&= \frac{2}{\vartheta^2} \cdot \int_0^{\vartheta} \xi^2 \, d\xi \\
&= \frac{2}{\vartheta^2} \cdot \left.\frac{\xi^3}{3}\right|_0^{\vartheta} \\
&= \frac{2}{3}\vartheta
\end{aligned}$$

Im Umkehrschluss:

$$E_{\vartheta}\left(\frac{3}{2} X_{\max}\right) = \vartheta$$

Analog ist

$$E_{\vartheta}\left(3 X_{\min}\right) = \vartheta$$

Für die Varianzen gilt (ich verzichte auf die ausführliche Rechnung):

$$Var\left(X_1 + X_2\right) = \frac{\vartheta^2}{6}$$

$$Var\left(\frac{3}{2} X_{\max}\right) = \frac{\vartheta^2}{8}$$

$$Var\left(3 X_{\min}\right) = \frac{\vartheta^2}{2}$$

Es ist demzufolge $\frac{3}{2} X_{\max}$ zu bevorzugen.

**Aufgabe 4**

Die Erwartungstreue ist genau dann erfüllt, wenn $E_\vartheta T(X) = \gamma(\vartheta)$ für $\forall \vartheta \in \Theta$ gilt.
Die Aufgabenstellung sagt weiter aus, dass:

$$\overline{X}_3 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} X_i \text{ und}$$

$$T(X_1, X_2, X_3) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 \text{ mit } \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$$

Wenn die obigen Gleichungen erwartungstreue Schätzer für $\mu$ sind, so muss $E_\vartheta \overline{X}_3 = \mu$ bzw. $E_\vartheta T(X_1, X_2, X_3) = \mu$ gelten.

Zuerst überprüfe ich den gleichgewichteten Schätzer:

$$\begin{aligned} E_\vartheta \overline{X}_3 &= E_\vartheta \left( \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} X_i \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot E_\vartheta \sum_{i=1}^{3} X_i \\ &= \frac{1}{3} \cdot (E_\vartheta X_1 + E_\vartheta X_2 + E_\vartheta X_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\mu + \mu + \mu) \\ &= \mu \end{aligned}$$

Für den variabel gewichteten Schätzer:

$$\begin{aligned} E_\vartheta T(X_1, X_2, X_3) &= E_\vartheta (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3) \\ &= E_\vartheta(\alpha_1 X_1) + E_\vartheta(\alpha_2 X_2) + E_\vartheta(\alpha_3 X_3) \\ &= \alpha_1 \cdot E_\vartheta X_1 + \alpha_2 \cdot E_\vartheta X_2 + \alpha_3 \cdot E_\vartheta X_3 \\ &= \alpha_1 \mu + \alpha_2 \mu + \alpha_3 \mu \\ &= \mu \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= \mu \end{aligned}$$

Somit habe ich gezeigt, dass beide Schätzer erwartungstreu für $\mu$ sind.

Der mittlere quadratische Fehler ist allgemein:

$$MSE_\vartheta(T) = Var_\vartheta(T(X)) + b_\vartheta(T)^2 \text{ mit } b_\vartheta(T) = E_\vartheta T(X) - \gamma(\vartheta)$$

Aus den vorherigen Gleichungen folgt, dass der Bias (die Verzerrung) 0 ist:

$$b_\vartheta(T) = E_\vartheta T(X) - \gamma(\vartheta) = \mu - \mu = 0$$

Somit wird der $MSE$ nur noch von der Varianz beeinflusst. Derjenige Schätzer, der die kleinere Varianz aufweist, hat auch den kleineren $MSE$.

Die Stichprobenvarianz einer gleichgewichteten Stichprobe:

$$Var_\vartheta \overline{X}_n = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$Var_\vartheta \overline{X}_3 = \frac{\sigma^2}{3}$$

Komplizierter wird die variabel gewichtete Stichprobe:

$$\begin{aligned} Var_\vartheta T(X_1, X_2, X_3) &= Var_\vartheta(\alpha_1 X_1) + Var_\vartheta(\alpha_2 X_2) + Var_\vartheta(\alpha_3 X_3) \\ &= \alpha_1^2 \cdot Var_\vartheta X_1 + \alpha_2^2 \cdot Var_\vartheta X_2 + \alpha_3^2 \cdot Var_\vartheta X_3 \\ &= \alpha_1^2\sigma^2 + \alpha_2^2\sigma^2 + \alpha_3^2\sigma^2 \\ &= \sigma^2 \cdot (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \end{aligned}$$

Als nächstes versuche ich, die $\alpha_i$ unter der Prämisse $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ zu minimieren. Dazu setze ich:

$$\begin{aligned} g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &:= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^2 \\ &=: h(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\min_{\alpha_1, \alpha_2} h(\alpha_1, \alpha_2) = \min_{\alpha_1}\left(\min_{\alpha_2} h(\alpha_1, \alpha_2)\right)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d\,h(\alpha_1, \alpha_2)}{d\,\alpha_1} &= 2\alpha_1 + 2 \cdot (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot (-1) \\ &= 4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2 \\ 0 &= 4\tilde{\alpha}_1 + 2\alpha_2 - 2 \\ 1 &= 2\tilde{\alpha}_1 + \alpha_2 \\ \tilde{\alpha}_1 &= \frac{1 - \alpha_2}{2} \end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_1} h(\alpha_1, \alpha_2) &= h(\tilde{\alpha}_1, \alpha_2) \\ &= \left(\frac{1 - \alpha_2}{2}\right)^2 + \alpha_2^2 + \left(1 - \frac{1 - \alpha_2}{2} - \alpha_2\right)^2 \\ &= \frac{(1 - \alpha_2)^2}{4} + \alpha_2^2 + \frac{(1 - \alpha_2)^2}{4} \\ &= \frac{(1 - \alpha_2)^2}{2} + \alpha_2^2 \\ &= \frac{1}{2} - \alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{2} + \alpha_2^2 \\ &= \frac{3}{2}\alpha_2^2 - \alpha_2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die anschließende Differentiation liefert:

$$\min_{\alpha_2} h(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{d}{d\alpha_2}\left(\frac{3}{2}\alpha_2^2 - \alpha_2 + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 3\alpha_2 - 1$$
$$0 = 3\tilde{\alpha}_2 - 1$$
$$1 = 3\tilde{\alpha}_2$$
$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{3}$$

Nachdem nun $\tilde{\alpha}_2$ bekannt ist, kann man nun problemlos auch noch $\tilde{\alpha}_1$ und $\tilde{\alpha}_3$ bestimmen:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1-\tilde{\alpha}_2}{2} = \frac{1}{3}$$
$$\tilde{\alpha}_3 = 1 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 = \frac{1}{3}$$

Diese Koeffizienten entsprechen genau dem gleichgewichteten Schätzer.