Noch ein kurzer Hinweis vorweg:

Ich habe zur Bearbeitung dieses Übungsblattes exzessiv Mathematik-Software benutzt. Daher sind einige Rechenschritte nur stark verkürzt wiedergegeben worden bzw. Ergebnisse unnötig genau (eventuell auch nicht exakt, d.h. Rundungsfehler können enthalten sein !).

Aufgabe 1

Gegeben sind die Realisierungen:

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
-1,112	-1,406	0,2960	-0,7342	-0,04339	-1,534	0,6996	0,1157	0,7541	0,7341

Um die Bestimmung der Quartile/Dezile zu vereinfachen, sortiere ich die Realisierungen:

y_6	y_2	y_1	y_4	y_5	y_8	y_3	y_7	y_{10}	y_9
-1,534	-1,406	-1,112	-0,7342	-0,04339	0,1157	0,2960	0,6996	0,7341	0,7541

Aus der Anzahl $n = 10$ folgt für die Quartile:

Quartil	α·n	(1-α)·n	mögliche Werte
$q_{\frac{1}{4}}$	3	8	$\{-1{,}112\}$
$q_{\frac{2}{4}}$	5	5	$[-0{,}04339; 0{,}1157]$
$q_{\frac{3}{4}}$	8	3	$\{0{,}6996\}$

Und für die Dezile:

Quartil	α·n	(1-α)·n	mögliche Werte
$q_{\frac{1}{10}}$	1	9	$[-1{,}534; -1{,}406]$
$q_{\frac{2}{10}}$	2	8	$[-1{,}406; -1{,}112]$
$q_{\frac{3}{10}}$	3	7	$[-1{,}112; -0{,}7342]$
$q_{\frac{4}{10}}$	4	6	$[-0{,}7342; -0{,}04339]$
$q_{\frac{5}{10}}$	5	5	$[-0{,}04339; 0{,}1157]$
$q_{\frac{6}{10}}$	6	4	$[0{,}1157; 0{,}2960]$
$q_{\frac{7}{10}}$	7	3	$[0{,}2960; 0{,}6996]$
$q_{\frac{8}{10}}$	8	2	$[0{,}6996; 0{,}7341]$
$q_{\frac{9}{10}}$	9	1	$[0{,}7341; 0{,}7541]$

Das Konfidenzintervall hat die Form:

$$I(y)=\left[\bar{y}-\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left|t_{n-1}\right|_{\alpha}\cdot\hat{\sigma};\ \bar{y}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left|t_{n-1}\right|_{\alpha}\cdot\hat{\sigma}\right]$$

wobei $\alpha = 0{,}95$ und $n = 10$. Somit entsteht:

$$\bar{y} = -0{,}223009$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{0{,}812016}$$

$$= 0{,}9011197$$

$$\left|\mathrm{t}_9\right|_{0,05} = 2{,}26$$

$$I(y)=\left[\bar{y}-\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\left|t_9\right|_{0,05}\cdot\hat{\sigma};\ \bar{y}+\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\left|t_9\right|_{0,05}\cdot\hat{\sigma}\right]$$

$$I(y)=[-0{,}867016;\ 0{,}4209985]$$

Das gegebene μ ist <u>nicht</u> im Konfidenzintervall enthalten, obwohl mit hoher Wahrscheinlichkeit (95%) dies der Fall sein sollte. Die Messung entspricht nicht unseren Erwartungen.

Aufgabe 2

Die beobachteten Werte sind:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	11	13	18	30	36	40	50	58	67	82	91	102
y	1,1	0,5	2,4	1,2	2,1	1,2	4	2,3	1,7	3,7	3	3,9

Die dazugehörigen Mittelwerte:

$$\overline{X}_n = 49{,}833333$$

$$\overline{Y}_n = 2{,}2583333$$

Für die Stichprobenkorrelation ergibt sich als Schätzung für die Korrelation:

$$r = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{12} \left(X_i - \overline{X}_i\right) \cdot \left(Y_i - \overline{Y}_i\right)}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{12} \left(X_i - \overline{X}_i\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{12} \left(Y_i - \overline{Y}_i\right)^2}}$$

$$= \frac{26{,}583333}{30{,}706331 \cdot 1{,}1827997}$$

$$\approx 0{,}732$$

Für $k = 0$ ergibt sich die Kleinste-Quadrate-Schätzung sehr einfach:

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{12} y_i$$

$$= 2{,}2583333$$

Auch für $k = 1$ kann eine Formel benutzt werden:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{12} \left(X_i - \overline{X}_i\right) \cdot \left(Y_i - \overline{Y}_i\right)}{\sum_{i=1}^{12} \left(X_i - \overline{X}_i\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \overline{x}$$

Mit den entsprechenden Messwerten:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{292{,}41667}{10371{,}6667}$$

$$= 0{,}0281938$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \overline{x}$$

$$= 2{,}2583333 - 0{,}0281938 \cdot 49{,}833333$$

$$= 0{,}8533423$$

Sucht man ein Polynom, das zweiter oder größerer Ordnung ist, so ist schon etwas mehr Aufwand notwendig.

$$\hat{\beta} = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_{12} \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{12}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & & \dots \\ 1 & x_{12} & x_{12}^2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_{12} \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{12}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & \sum_{i=1}^{12} x_i & \sum_{i=1}^{12} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{12} x_i & \sum_{i=1}^{12} x_i^2 & \sum_{i=1}^{12} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{12} x_i^2 & \sum_{i=1}^{12} x_i^3 & \sum_{i=1}^{12} x_i^4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{12} y_i \\ \sum_{i=1}^{12} x_i y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{12} x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 598 & 40172 \\ 598 & 40172 & 3134038 \\ 40172 & 3134038 & 264945764 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 27{,}1 \\ 1642{,}9 \\ 122382{,}7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}775 \\ 0{,}032 \\ -0{,}00003751 \end{pmatrix}$$

Zusammenfassend sieht das Polynom so aus:

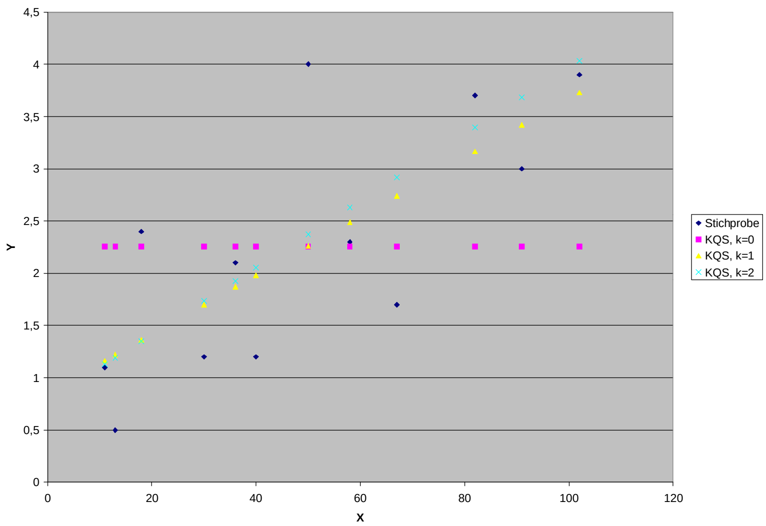
$$\hat{\beta}_0 = 0{,}775$$

$$\hat{\beta}_1 = 0{,}032$$

$$\hat{\beta}_2 = -0{,}00003751$$

$$KQS(y,2) = -0{,}00003751x^2 + 0{,}032x + 0{,}775$$

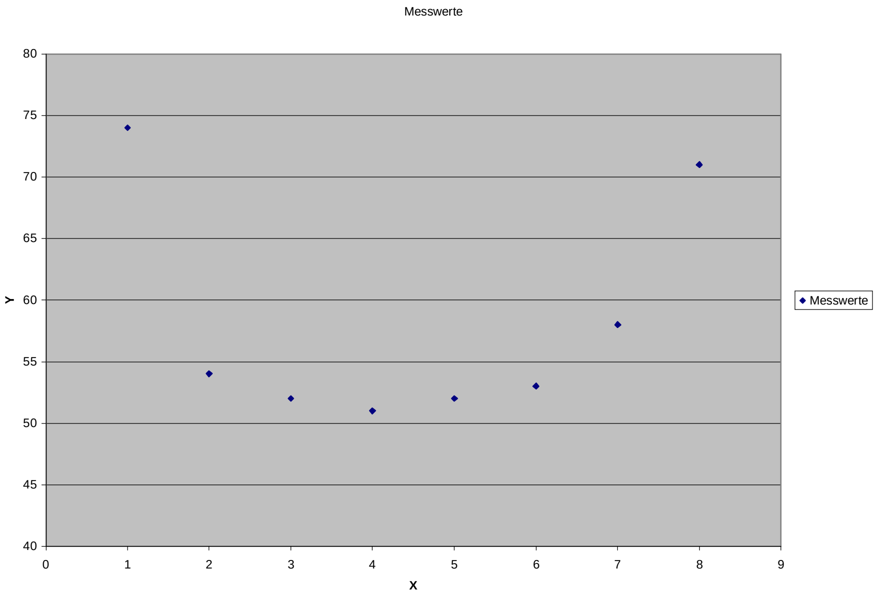
Im Diagramm sieht man gut, wie sich die KQS‘ höherer Ordnung stärker an die Messwerte anschmiegen, insbesondere werden die Y für große X besser geschätzt:



Aufgabe 3

Stellt man die Messwerte graphisch dar, so erkennt man, dass das erforderliche Polynom vermutlich mindestens vom Grad 2 sein sollte:

	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	74	54	52	51	52	53	58	71



Zwar ist die Genauigkeit bei der Verwendung eines höhergradigeren Polynoms i.d.R. besser, dem steht aber ein deutlich erhöhter Rechenaufwand gegenüber, deshalb entschied ich mich für $k = 2$.

$$\hat{\beta} = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_8 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_8^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \dots & & \dots \\ 1 & x_8 & x_8^2 \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_8 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_8^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & \sum_{i=1}^{8} x_i & \sum_{i=1}^{8} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{8} x_i & \sum_{i=1}^{8} x_i^2 & \sum_{i=1}^{8} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 & \sum_{i=1}^{8} x_i^3 & \sum_{i=1}^{8} x_i^4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{8} y_i \\ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 y_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 36 & 204 \\ 36 & 204 & 1296 \\ 204 & 1296 & 8772 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 465 \\ 2094 \\ 12168 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 84{,}482 \\ -15{,}875 \\ 1{,}768 \end{pmatrix}$$

Das Polynom lautet demzufolge:

$$KQS(y,2) = 1{,}768x^2 - 15{,}875x + 84{,}482$$

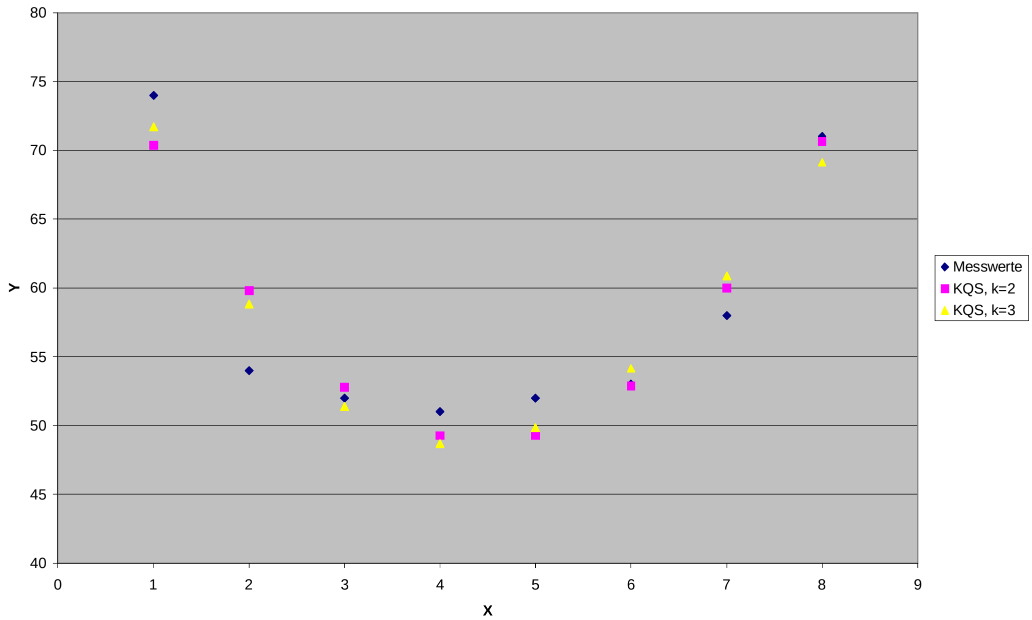
Interessehalber ließ ich mittels Computer noch die KQS 3.Grades bestimmen:

$$KQS(y,3) = -0{,}129x^3 + 3{,}506x^2 - 22{,}508x + 90{,}857$$

Wenn man beide in ein Diagramm einträgt, so sieht man, dass das Polynom 3.Grades eine etwas bessere Schätzung liefert. Diese Aussage kann ich noch durch die mittlere quadratische Abweichung der Polynome von den Messwerten untermauern:

$$Var\ KQS(y,2) = 7{,}7210035$$

$$Var\ KQS(y,3) = 6{,}4941295$$



Anhang

Die Bestimmung des Inversen einer Matrix ist zwar theoretisch recht einfach und anschaulich, artet aber praktisch in sehr viel fehleranfälliger Rechnerei aus. Recht günstig funktioniert folgende Gleichung für quadratische Matrizen:

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{ji}$$

Dabei ist $\left(A^{-1}\right)_{ij}$ das Element von A^{-1} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Ferner ist A_{ji} die Adjunkte zu a_{ji} in der Determinante von A. Natürlich muss $\det A \neq 0$ sein.
Die Adjunkte A_{ji} besteht aus derjenigen Determinante, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, multipliziert mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+j}$.

Beispiel:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Zuerst bestimmt man die Determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= 28 + 25 + 36 - 30 - 21 - 40 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Für a_{11} ermittelt man den Wert:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\det A} \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (28 - 30) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Oder für a_{12}:

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{\det A} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (7 - 12) \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Alle anderen Matrizenelemente berechnet man analog und erhält:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2{,}5 & 1{,}5 \\ -2 & 1{,}5 & -0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$