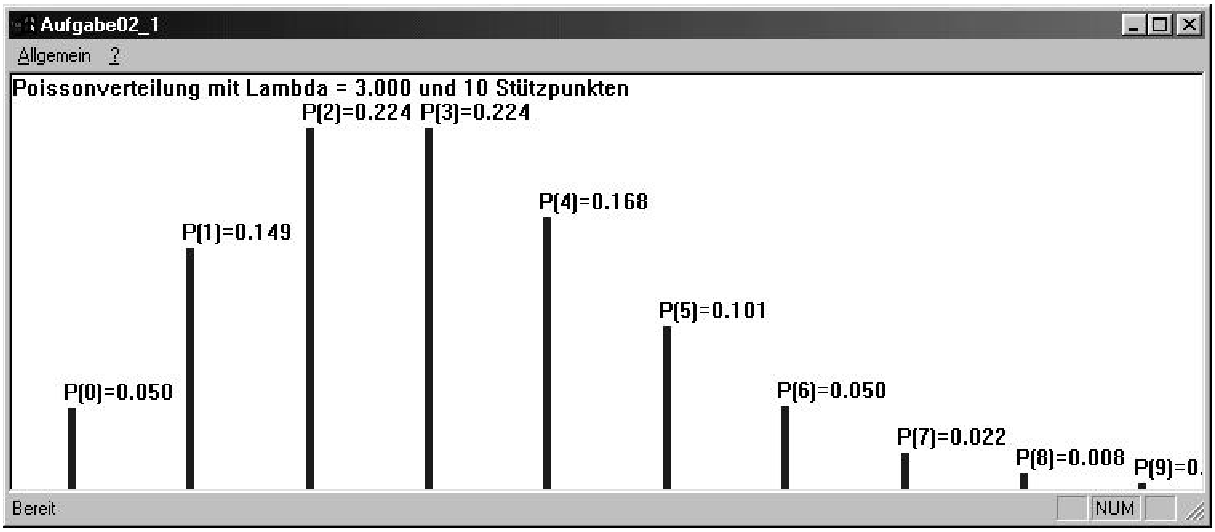
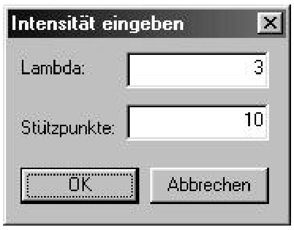
Aufgabe 1



Ich schrieb ein C++ Programm für Windows, das die Poission-Verteilung graphisch darstellen kann. Die veränderbaren Parameter sind:



Der gesamte Quellcode ist recht groß (ca. 90% sind aber automatisch vom Compiler generiert, um die Verwaltung von Windows-Eigenschaften zu übernehmen), deshalb beschränke ich mich auf die Zeichenroutine, wobei ich die Umsetzung der mathematischen Formel blau hervorhebe:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

```
CPaintDC dc(this); // Gerätekontext zum Zeichnen

// der Zeichenbereich
CRect rect;
GetClientRect(rect);
int nWidth = rect.Width();
int nHeight = rect.Height();

// ein blauer Stift mit 5 Pixel Breite
CPen pen (PS_SOLID, 5, RGB(0,0,255));
dc.SelectObject(&pen);

// alle Stützpunkte durchlaufen (entsprechen k)
for (int nLoop = 0; nLoop < m_nPoints; nLoop++)
{
        // Fakultät von k berechnen
        double dFakK = 1;
        for (int nFak = 1; nFak <= nLoop; nFak++)
                dFakK *= nFak;

        // P(k) ermitteln
        double dP = (pow(m_dLambda, nLoop) * exp(-m_dLambda)) / dFakK;

        // gleichmäßig in der Fensterbreite verteilen
        int x = int((nLoop+0.5) * nWidth/m_nPoints);
        // strecken, damit man die Säulen auch sieht (x1000)
        int y = nHeight - (int) (dP * 1000);
```

```
            // die entsprechende Säule zeichnen
            dc.MoveTo(x, nHeight);
            dc.LineTo(x,y);

            // und mit den exakten Werten beschriften
            CString strOutput;
            strOutput.Format("P(%d)=%.3f", nLoop, dP);
            CRect textrect(x-5,y-20, x+100, y);
            dc.DrawText(strOutput, textrect, DT_SINGLELINE);
        }

        // noch ein kleiner erklärender Text am oberen Rand
        CString strOutput;
        strOutput.Format("Poissonverteilung mit Lambda = %.3f und %d Stützpunkten", m_dLambda,
m_nPoints);
        CRect textrect(0,0, 500, 25);
        dc.DrawText(strOutput, textrect, DT_SINGLELINE);
```

Aufgabe 2

Es ist:

$$f_{\tilde{\vartheta}}(y) = \left(1-\tilde{\vartheta}\right)^{y-1}\tilde{\vartheta}, \quad y = 1,2,\ldots$$

Laut Aufgabenstellung ist $\tilde{\vartheta}$ für ein gegebenes y gesucht, ich kann y somit als konstant ansehen. Das Maximum erhält man dann als Ableitung obiger Funktion nach ϑ.

$$\begin{aligned}
f_{\vartheta}(y)\frac{d}{d\vartheta} &= \left(\left(1-\vartheta\right)^{y-1}\cdot\vartheta\right)\frac{d}{d\vartheta} \\
&= \left(1-\vartheta\right)^{y-1}\cdot 1 + \left(\left(1-\vartheta\right)^{y-1}\right)\frac{d}{d\vartheta}\cdot\vartheta \\
&= \left(1-\vartheta\right)^{y-1} - \vartheta\cdot\left(y-1\right)\cdot\left(1-\vartheta\right)^{y-2} \\
&= \left(1-\vartheta\right)\cdot\left(1-\vartheta\right)^{y-2} - \vartheta\cdot\left(y-1\right)\cdot\left(1-\vartheta\right)^{y-2} \\
&= \left(1-\vartheta\right)^{y-2}\cdot\left(1-\vartheta-\vartheta\cdot\left(y-1\right)\right) \\
&= \left(1-\vartheta\right)^{y-2}\cdot\left(1-\vartheta\cdot y\right)
\end{aligned}$$

Die Extrema der Funktion sind die Nullstellen der Ableitung:

$$0 = \left(1-\tilde{\vartheta}\right)^{y-2}\cdot\left(1-\tilde{\vartheta}\cdot y\right)$$

Jetzt kommt eine Fallunterscheidung zum Zuge:

1. Fall:

$$0 = \left(1-\tilde{\vartheta}\right)^{y-2}$$
$$0 = 1-\tilde{\vartheta}$$
$$1 = \tilde{\vartheta}$$

2. Fall:

$$0 = 1-\tilde{\vartheta}\cdot y$$
$$1 = \tilde{\vartheta}\cdot y$$
$$\frac{1}{y} = \tilde{\vartheta}$$

Es interessieren uns aber nicht alle Extrema, sondern nur die Maxima. Per Definition ist $0 \leq f_\vartheta(y) \leq 1$. Da aber für den ersten Fall sich $\left(1-\tilde{\vartheta}\right)^{y-1}\tilde{\vartheta} = (1-1)^{y-1} \cdot 1 = 0$ ergibt, ist dies ein Minimum. Da nur ein weiteres Extrema existiert, muss es sich dabei um ein Maximum handeln, d.h. die Lösung für den Fall 2 ist der gesuchte Wert: $\tilde{\vartheta} = \frac{1}{y}$.

<u>Aufgabe 3</u>

a) $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Diese Aufgabenstellung könnte man über die erste Ableitung lösen. Dieser Weg erscheint mir jedoch zu aufwändig, deshalb untersuche ich die Funktion auf ihre sonstigen mathematischen Eigenheiten:

Der Funktionswert $f(y)$ hängt variabel nur von $e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ab. Der Exponent ist im Nenner konstant, sowohl Nenner als auch Zähler sind stets nicht-negativ (da sie 2er Potenzen sind). Das führende Minus erzeugt demzufolge die Tatsache, dass der gesamte Exponent stets nicht-positiv ist. Dieser Teilterm ist genau dann maximal, wenn der Exponent Null ist, was bei $y_{\max} - \mu = 0$, d.h. $y_{\max} = \mu$ der Fall ist. Sollte μ eine rationale Zahl sein, so ist die Gleichung nicht erfüllbar, da y dem Bereich der natürlichen Zahlen per Definition zugehört. Das Maximum lautet dann $|y_{\max} - \mu| \leq \frac{1}{2}$.

b) $P_\lambda(y) = \frac{1}{y!}\lambda^y e^{-\lambda}$

Es kann λ als konstant angesehen werden. Der veränderliche Part in der Funktion lautet somit: $\frac{1}{y!}\lambda^y$. In der graphischen Veranschaulichung ergibt sich folgendes Bild:

$$P_\lambda(y) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^y}{y!}\right) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \ldots \cdot \lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot y}\right)$$

Für $y_2 = y+1$ ist dann:

$$\begin{aligned} P_\lambda(y_2) &= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^{y_2}}{y_2!}\right) = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \ldots \cdot \lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot y_2}\right) \\ &= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda \cdot \ldots \cdot \lambda}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot y} \cdot \frac{\lambda}{y+1}\right) \\ &= P_\lambda(y) \cdot \frac{\lambda}{y+1} \end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, dass $P_\lambda(y_2) > P_\lambda(y)$ nur dann gelten kann, wenn $\frac{\lambda}{y+1} > 1$, d.h. $\lambda > y+1$.
Als Schlussfolgerung ist $P_\lambda(y)$ genau dann maximal, wenn $P_\lambda(y-1) < P_\lambda(y) > P_\lambda(y+1)$. Gemäß obiger Ungleichung heisst das, dass $y < \lambda < y+1$, also $y = \lfloor \lambda \rfloor$.