Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Würfeln sieht folgendermaßen aus:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$^1/_{36}$	$^2/_{36}$	$^3/_{36}$	$^4/_{36}$	$^5/_{36}$	$^6/_{36}$	$^5/_{36}$	$^4/_{36}$	$^3/_{36}$	$^2/_{36}$	$^1/_{36}$

Ich nutze diese Datenbasis und konstruiere daraus eine neue Zufallsgröße $Z:\Omega \to \mathrm{Z}$, die die Beziehung zwischen Würfelergebnis und Gewinn $x_i \in \{0,3,5,10\}$ darstellt:

x_i	0	3	5	10
p_i	$^{30}/_{36}$	$^3/_{36}$	$^2/_{36}$	$^1/_{36}$

Der Erwartungswert und die Varianz sind dementsprechend:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i \\ &= 0\cdot\frac{30}{36} + 3\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{2}{36} + 10\cdot\frac{1}{36} \\ &= \frac{29}{36} \approx 0{,}80\overline{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VarX &= \sum_{i=1}^{4} (x_i - EX)^2 \cdot p_i \\ &= \left(0-\frac{29}{36}\right)^2 \cdot \frac{30}{36} + \left(3-\frac{29}{36}\right)^2 \cdot \frac{3}{36} + \left(5-\frac{29}{36}\right)^2 \cdot \frac{2}{36} + \left(10-\frac{29}{36}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} \\ &\approx 0{,}541 + 0{,}401 + 0{,}977 + 2{,}348 \\ &\approx 4{,}267 \end{aligned}$$

Ich würde an dem Spiel nicht teilnehmen, da 2 DM Einsatz nur durchschnittlich zu erwartende 80 Pfennig Gewinn gegenüberstehen.

Aufgabe 2

Die Situation lässt sich als geometrische Verteilung auffassen, wobei $\vartheta = 0{,}5$ gilt:

$$EX = \frac{1}{\vartheta} = 2$$

$$VarX = \frac{1-\vartheta}{\vartheta^2} = \frac{0{,}5}{0{,}25} = 2$$

Aufgabe 3

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach genau i Würfen ein Wappen erscheint, beträgt 2^{-i}. Die zu zahlende Strafgebühr wurde in der Aufgabenstellung mit 2^i festgelegt, was bedeutet, dass ich pro Runde 1 DM Strafe für den Fall i zahlen muss. Leider kann i beliebig groß werden, d.h. auch Werte über 1000 annehmen. Dies bedeutet wiederum, dass ich pro Runde stochastisch gesehen mehr Strafe zahle als ich Startgeld bekomme.

Aus rein mathematischer Sicht würde ich an dem Spiel nicht teilnehmen. Da ich jedoch ein Glückskind bin und als Student jede Mark gut gebrauchen kann, riskiere ich alles, schließlich gewinne ich ja noch in immerhin rund 99,8% aller Fälle !

Ein viel pragmatischerer Ansatz ist der, dass ich bei einer angenommenen Spielgeschwindigkeit von einer Runde pro Sekunde in meinem ganzen Leben ca. 2,4 Mrd. Runden spielen könnte. Die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass ich mehr 1000 Würfe brauche für ein Wappen liegt dann immer noch bei ca. 2^{-971}, das Risiko ist also äußerst gut kalkulierbar, wenn auch nicht unwahrscheinlich.

Aufgabe 4

Es sei i die Häufigkeit des Auftretens von Ereignis A, wobei laut Aufgabenstellung $i \in \{0,1,2,3\}$ gilt. Außerdem handelt es sich um eine binomiale Verteilung mit $\vartheta = 0{,}4$.

$$p(i) = \binom{3}{i} \cdot \vartheta^i \cdot (1-\vartheta)^{3-i}$$

Tabellarisch ergibt sich:

i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Und als Verteilungsfunktion: