Aufgabe 1

Die Schiefe einer Poisson-Verteilung erhält man aus der Formel $\gamma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ (siehe Skript S. 46). Für die gegebenen Werte erhält man die Schiefen $\gamma_4 = \frac{1}{2}$, $\gamma_{10} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ und $\gamma_{20} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Die Schiefen sind alle positiv, da λ stets positiv ist. Somit sind die Poisson-Verteilungen immer rechtsseitig.
Eine allgemein ableitbare Tendenz ist, dass sich die Schiefen γ umgekehrt proportional zum Parameter λ verhalten.

Aufgabe 2

Ich führe die N(6,16)-Verteilung auf die N(0,1)-Verteilung zurück:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad \text{mit } u = \frac{v-\mu}{\sigma}$$

Laut Aufgabenstellung gilt $\mu = 6$ und $\sigma = \sqrt{16} = 4$. Außerdem wird die Wahrscheinlichkeit für negative Zahlen erfragt, d.h. $v = 0$, woraus $u = -\frac{\mu}{\sigma} = -\frac{3}{2}$ folgt.

Aus der N(0,1)-Tabelle erhält man $\varphi\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - \varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - 0{,}933 = 0{,}067$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 6,7% werden negative Werte angenommen.

Aufgabe 3

a) Das gesuchte Ergebnis erhält man durch Bildung des bestimmten Integrals der Exponentialverteilung im Intervall $(8{,}9)$ mit dem Parameter $\mu = 8{,}5$:

$$\begin{aligned}
\int_8^9 \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}} dx &= \frac{1}{8{,}5} \cdot \int_8^9 e^{-\frac{x}{8{,}5}} dx \\
&= -\frac{8{,}5}{8{,}5} \cdot e^{-\frac{x}{8{,}5}} \Big|_8^9 \\
&= -e^{-\frac{x}{8{,}5}} \Big|_8^9 \\
&\approx 0{,}043
\end{aligned}$$

b) Die Schiefe ist

$$\frac{E\left((X-EX)^3\right)}{\sigma^3}=\frac{E\left((X-\lambda)^3\right)}{\lambda^3}$$
$$=\frac{1}{\lambda^3}\cdot E\left(X^3-3X^2\lambda+3X\lambda^2-\lambda^3\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda^3}\cdot\left(EX^3-3\lambda EX^2+3\lambda^2 EX-\lambda^3\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda^3}\cdot\left(6\lambda^3-6\lambda^3+3\lambda^3-\lambda^3\right)$$
$$=2$$

da

$$EX^3=\int_0^\infty \frac{x^3}{\lambda}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$
$$=-x^3e^{-\frac{x}{\lambda}}\Big|_0^\infty+3\int_0^\infty \frac{x^2}{\lambda}\cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}dx$$
$$\ldots$$
$$=-e^{-\frac{x}{\lambda}}\cdot\left(-x^3-3\lambda x^2+6x\lambda^2+6\lambda^3\right)\Big|_0^\infty$$
$$=6\lambda^3$$

Die Schiefe ist stets 2, d.h. jede Exponentialverteilung ist rechtsschief.

<u>Aufgabe 4</u>

Sollten beide Medikamente die gleiche Wirksamkeit zeigen, so liegt die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A (Medikament A ist scheinbar stärker in der Wirkung) genauso hoch wie die für B (Medikament B ist vermutlich besser). Ich führe dieses Experiment auf eine binomiale Verteilung zurück, wobei ich als Erfolg das Medikament A ansehe, Misserfolg drückt sich in Eintreten des Ereignisses B aus. Diese Verteilung bildet einen neuen Grundraum, der noch in zwei Teile zerlegt werden muss. Der erste Teil beinhaltet die Möglichkeiten einer Bevorzugung eines Medikamentes, d.h. mehr als 11 Patienten haben sich für eines entschieden, der zweite Teil bildet das Komplement ab.

$$\vartheta=0{,}5$$
$$n=15$$
$$P(k)=\binom{n}{k}\cdot\vartheta^k\cdot(1-\vartheta)^{n-k}$$
$$=\binom{15}{k}\cdot 0{,}5^{15}$$

Hierbei ist noch darauf zu achten, dass, wenn sich weniger als 4 Leute für ein Medikament entschieden haben, automatisch sich mehr als 11 das andere bevorzugen (Symmetrie). Diese Idee erspart uns 50% der Berechnungen.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(k)$	0,0000	0,0005	0,0032	0,0139	0,0417	0,0916	0,1527	0,1964
$P(Z \leq k)$	0,0000	0,0005	0,0037	0,0176	0,0592	0,1509	0,3036	0,5000

Die Wahrscheinlichkeit für die irrtümliche Bevorzugung eines Medikamentes liegt bei

$$P(Z \leq 3) + P(Z \geq 11) = 2 \cdot P(Z \leq 3) \approx 2 \cdot 0{,}0176 \approx 0{,}0352$$

Der Arzt hat ein Risiko von ca. 3,5% einzuplanen, dass er bei zwei identischen Medikamenten eines für das deutlich wirkungsvollere von beiden hält.