Aufgabe 1

Grundlage meiner Lösung ist der Zentrale Grenzwertsatz in Verbindung mit einer Binomialverteilung.

Die 600 Würfe sind unabhängig, aber identisch verteilt mit $\vartheta = \frac{1}{6}$:

$$EX = \mu = \frac{1}{6} \cdot 600 = 100$$

$$VarX = \sigma^2 = 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{250}{3}$$

Allgemein ist:

$$P(V_n \leq x) = P\left(\frac{S_n - ES_n}{\sigma} \leq x\right) \approx \Phi(x)$$

Angewandt auf die Aufgabenstellung:

$$\begin{aligned} P(V_{600} \leq x) &= P\left(\frac{S_{600} - 100}{\sqrt{\frac{250}{3}}} \leq x\right) \\ &= P\left(S_{600} \leq 100 + x\sqrt{\frac{250}{3}}\right) \\ &\approx \Phi(x) \end{aligned}$$

Gesucht ist nun $P(95 \leq S_{600} \leq 105)$, d.h. $P(S_{600} \leq 105) - P(S_{600} \leq 94)$:

$$\begin{aligned} P(95 \leq S_{600} \leq 105) &= \Phi\left(5 \cdot \sqrt{\frac{3}{250}}\right) - \Phi\left(-5 \cdot \sqrt{\frac{3}{250}}\right) \\ &\approx \Phi(0{,}5477) - (1 - \Phi(0{,}5477)) \\ &\approx 2 \cdot 0{,}708 - 1 \\ &\approx 41{,}6\% \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Zuerst bestimme ich die Erwartungswerte bzw. Varianzen von X und Y:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i \\ &= (-1)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$EY = EX = 0$$

$$\begin{aligned} VarX &= \sum_{i=1}^{4} (x_i - EX)^2 \cdot p_i \\ &= 1\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$VarY = VarX = \frac{1}{2}$$

Die Werte x_i treten in X und in Y jeweils mit den gleichen Wahrscheinlichkeiten p_i auf.
Die Kovarianz ist dementsprechend:

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E((X-EX)\cdot(Y-EY)) \\ &= \sum_{i=1}^{4} (x_i - EX)\cdot(y_i - EY)\cdot p_i \\ &= \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot y_i \cdot p_i \\ &= 0\cdot 1\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot 0\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot(-1)\cdot\frac{1}{4} + (-1)\cdot 0\cdot\frac{1}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die Korrelation ist ebenfalls 0:

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX \cdot VarY}} \\ &= \frac{0}{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d.h. die beiden Zufallsgrößen sind unkorreliert.

Wenn ich nun die Ereignisse in einer Matrix erfasse, erhalte ich:

x\y	-1	0	-1	∑
-1	0	$^1/_4$	0	$^1/_4$
0	$^1/_4$	0	$^1/_4$	$^1/_2$
1	0	$^1/_4$	0	$^1/_4$
∑	$^1/_4$	$^1/_2$	$^1/_4$	1

Ich habe drei Zellen grau markiert: Wenn die Verteilung unabhängig wäre, müsste die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (0,-1) sich als Produkt aus der Zeilensumme ¼ und der Spaltensumme ½ ergeben. Dem ist jedoch nicht so, deshalb ist die Verteilung nicht unabhängig.

Aufgabe 3

Für ein festes k ist $EX_k = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot p_i$. Es findet sich zu jedem Ereignis x_r ein Ereignis x_s, das den gleichen Absolutbetrag, aber ein anderes Vorzeichen hat. Somit ist $EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \mu = 0$.

Die Varianz ist genauso unabhängig von n: $VarX_k = \sum_{i=1}^{k} (x_i - EX_k)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^{\,2} \cdot p_i$.

Auch hier kann man die gleiche Paarbildung vollziehen und erhält dann $\sigma^2 = 1$.

Nun überprüfe ich das Gesetz der großen Zahlen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Aus genau dieser Gleichung folgt, dass das Gesetz zutrifft.

Man könnte auch noch auf den 2. Kolmogorowschen Satz zurückgreifen und erkennt, dass EX_k existiert und stets $EX_k = \mu = 0$ gilt. Demzufolge muss $\overline{X}_n$ gegen $\mu = 0$ konvertieren.

Aufgabe 4

Die Gleichverteilung über den Intervall $[0,1]$ hat die Momente:

$$E\overline{X} = \frac{1}{48} \cdot 48 \cdot EX_i = \frac{1}{2}$$

$$Var\overline{X}_{48} = \frac{1}{48} \cdot VarX_i = \frac{1}{48} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{576}$$

Die Wahrscheinlichkeit für 48 gleichverteilte Zahlen, dass ihr arithmetisches Mittel unter 0,4 liegt, ist laut der Chebyshevschen Ungleichung:

$$P\left(\left(\overline{X}_n - E\overline{X}\right) \geq \varepsilon\right) = \frac{1}{2} \cdot P\left(\left|\overline{X}_n - 0{,}5\right| \geq 0{,}1\right)$$

Für $n = 48$:

$$\frac{1}{2} \cdot P\left(\left|\overline{X}_{48} - 0{,}5\right| \geq 0{,}1\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{Var\overline{X}_{48}}{\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left(\overline{X}_{48} - E\overline{X}\right) \leq \varepsilon\right) \leq \frac{100}{2 \cdot 12 \cdot 48} \approx 0{,}0868$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 8,7% liegt das arithmetische Mittel unter 0,4.
Diese Abschätzung ist aber zu großzügig, hier wendet man besser den Zentralen Grenzwertsatz an.

Dabei können wir die bereits bekannten Momente der Gleichverteilung weiterverwenden:

$$EX_i = \frac{1}{2}$$

$$VarX_i = \frac{1}{12}$$

Diese Werte setze ich in die allgemeine Formel des Zentralen Grenzwertsatzes ein:

$$V_{48} = \frac{S_{48} - 48 \cdot EX_i}{\sqrt{48} \cdot \sqrt{VarX_i}}$$

$$= \frac{S_{48} - 24}{2}$$

$$P(V_{48} \le x) = P\left(\frac{S_{48} - 24}{2} \le x\right)$$

$$= P(S_{48} \le 24 + 2x)$$

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass das arithmetische Mittel kleiner als $0{,}4$ ist:

$$P(S_{48} < 0{,}4 \cdot 48) = P(S_{48} < 19{,}2)$$

$$\approx P(S_{48} \le 19{,}2)$$

$$\approx \Phi\left((19{,}2 - 24) \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx \Phi(-2{,}4)$$

$$\approx 1 - \Phi(2{,}4)$$

$$\approx 1 - 0{,}992$$

$$\approx 0{,}008$$

Man errechnet, dass die Wahrscheinlichkeit bei nur ca. 0,8% liegt, was einen deutlich kleineren Wert als die Chebyshev-Ungleichung darstellt. Dieser Unterschied macht die Ungenauigkeit der eher allgemein gehaltenen Ungleichung deutlich.