Wahrscheinlichkeit und Statistik

Wintersemester 2000/2001
Zusammenfassung von Michael Herms

Hinweis:
Diese Zusammenfassung ersetzt keinesfalls die Mitschrift in der Vorlesung, noch das Studium von Fachliteratur und Scripten. Die Zusammenfassung versteht sich lediglich als roter Faden durch die Lehrveranstaltung.

Besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle meinen Kommilitonen Tim Friese und Stefan Doktor zukommen lassen, die mich fachlich und schreibtechnisch stark bei der Erstellung dieses Script unterstützt haben.

Teil 1

Wahrscheinlichkeitstheorie

Zeichenerklärung I

Ω............. sicheres Ereignis
$\varnothing$ .... unmögliches Ereignis
A .... Ereignis (allg.: große lat. Zeichen)
P.............. Wahrscheinlichkeitsmaß
ZG............ Zufallsgröße
Wk .... Wahrscheinlichkeit
X(ω)....... ω wird ein reeller Wert zugeordnet
x .... Realisierung : X(ω)=x
ω .... Elementarereignis
ϑ .... Erfolgs-Wk. (griech.: Theta)

μ .... Erwartungswert (griech.: My)
σ^2 .... Varianz (griech.: Sigma)
$\sqrt{\sigma^2}$ ... ... Standardabweichung
k .... Anzahl der Erfolge
r............ ... Zahl der Wiederholungen
B(r, ϑ). ... Notation für Binomialverteilung
N(μ,σ^2)... Notation für Normalverteilung

Erwartungswert

diskret

Y=aX+b → EY=aEX+b

Y=g(X) → $EY = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$

kontinuierlich

$$EZ = \mu = \int x dP^Z(x)$$
$$= \int xp(x)dx, \text{ p(x)...Dichte}$$

Rechenregeln *(Script Seite 52)*

$$E(Z+Y) = EZ + EY$$
$$EZY = EZ * EY \text{ (nur bei unabhängig)}$$

Varianz

diskret

Varianz = $\sum_i (x_i - EX)^2 p_i = \sigma^2$

↳Standardabweichung = $\sqrt{\sigma^2}$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \mathrm{E(X - EX)}^2$$

kontinuierlich

$$\text{VarZ=} \quad \sigma^2 = \int (x-\mu)^2 dP^Z(x) = \int (x-\mu)^2 p(x)dx$$

Rechenregeln *(Script Seite 53)*

$$Var(Z+Y) = VarZ + VarX \text{ (bei stetig)}$$
$$+2(E(XY) - EXEY) \text{ (nur bei unstetig)}$$
$$Var(aZ) = a^2 Var(z)$$

Kovarianz

$$Cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$$
$$= EXY - EXEY$$

Schiefe

$$\text{Schiefe=}\frac{E\left((X-EX)^3\right)}{\sigma^3} = \frac{\sum_i (x_i-\mu)^3 p_i}{\left(\sqrt{\sum_i (x_i-\mu)^2 p_i}\right)^3}$$

positiv = rechtsschief, **negativ** = linksschief

Exzess

Exzess=$\frac{E\left((X-EX)^4\right)}{\sigma^4} - 3$ … ist 0 (null) bei Normalverteilung und zeigt sonst, ob stärker (>0) oder schwächer (<0) als NV gewölbt.

Modalwert

Modalwert$= \text{argument} \max_i f(x_i)$???

Wert in dem die Wk-fkt. für x_i maximal ist.
Im kontinuierlichen, der Wert x, für den die Dichtefunktion maximal ist.

Korellationskoeffizient

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Median

Der Median halbiert die Wahrscheinlichkeitsmasse, so dass links und rechts des Medians die Wk = ½ (für diskrete Verteilungen : Wk $\geq$ 1/2) ist.

Relative Häufigkeit *(Script Seite 8)*

diskret

$h_a(A) = \frac{k}{n}$ => k Erfolge bei n Versuchen

Klassische Wahrscheinlichkeit *(Script Seite 8-10)*

diskret

Ω als Grundraum mit endlich vielen Elementen oder abzählbar unendlich vielen Elementen.
Es gilt Gleichwahrscheinlichkeit.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elemente in A}}{\text{Anzahl der Elemente in }\Omega} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Anzahl aller Fälle}}$$

$$P(A/B) = \frac{\text{Anzahl der Elemente von A} \cap \text{B}}{\text{Anzahl der Elemente von A}} = \frac{\text{Anzahl der für A und B günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der für B günstigen Fälle}}$$

Diskrete Gleichverteilung

$$P(X = x_i) = \frac{1}{m}, i = 1...m$$

$$EX = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i$$

$$VarX = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (x_i - EX)^2$$

für $x_i = i$

$$EX = \frac{m+1}{2}$$

$$VarX = \frac{m^2-1}{12}$$

kontinuierlich(stetige) *(Script Seite 55)*

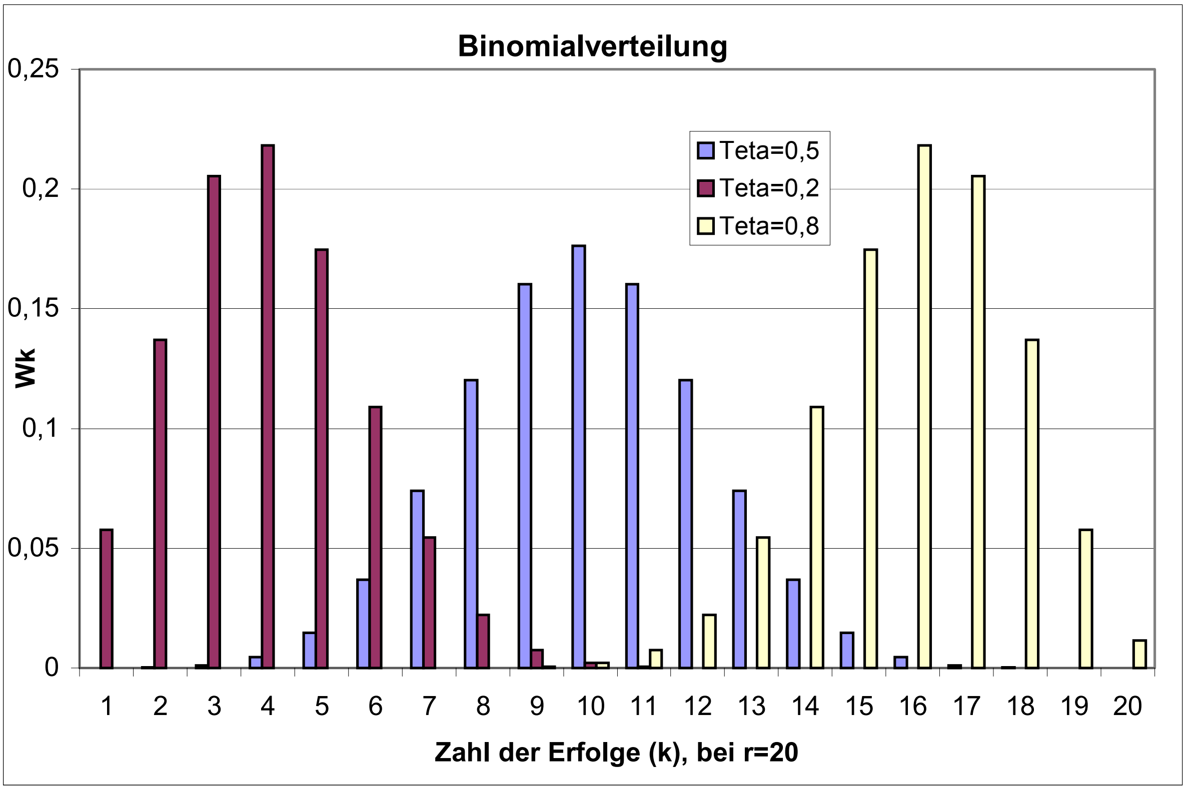
Identisch verteilt auf dem Intervall [a,b]

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{x} \le \text{a} \\ \frac{x-a}{b-a}, \text{für } x \in [a,b] \\ 1, \text{x} \ge \text{b} \end{cases}$$

Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{für } x \in [a,b] \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$



Binomialverteilung

<u>diskret</u>

Bernoulli-Experiment mit **r-facher Wiederholung**. Jedes Experiment hat genau **zwei** mögliche **Ergebnisse**: 1 – 0

ϑ ... Erfolgs-Wk
k ... Anzahl der Erfolge
B(r, ϑ) ... Notation für Binomialverteilung

$\omega_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \Omega_i = \{0,1\}$ und $\Omega = \{\omega \mid (\omega_1,\ldots,\omega_r)\} = \{0,1\}^r$. Hier ist $\vartheta = P(1)$ unabhängig von *i*. Es gilt:

$P(\omega) = \vartheta^k (1-\vartheta)^{r-k}$, falls genau k-mal 1 in ω ist.

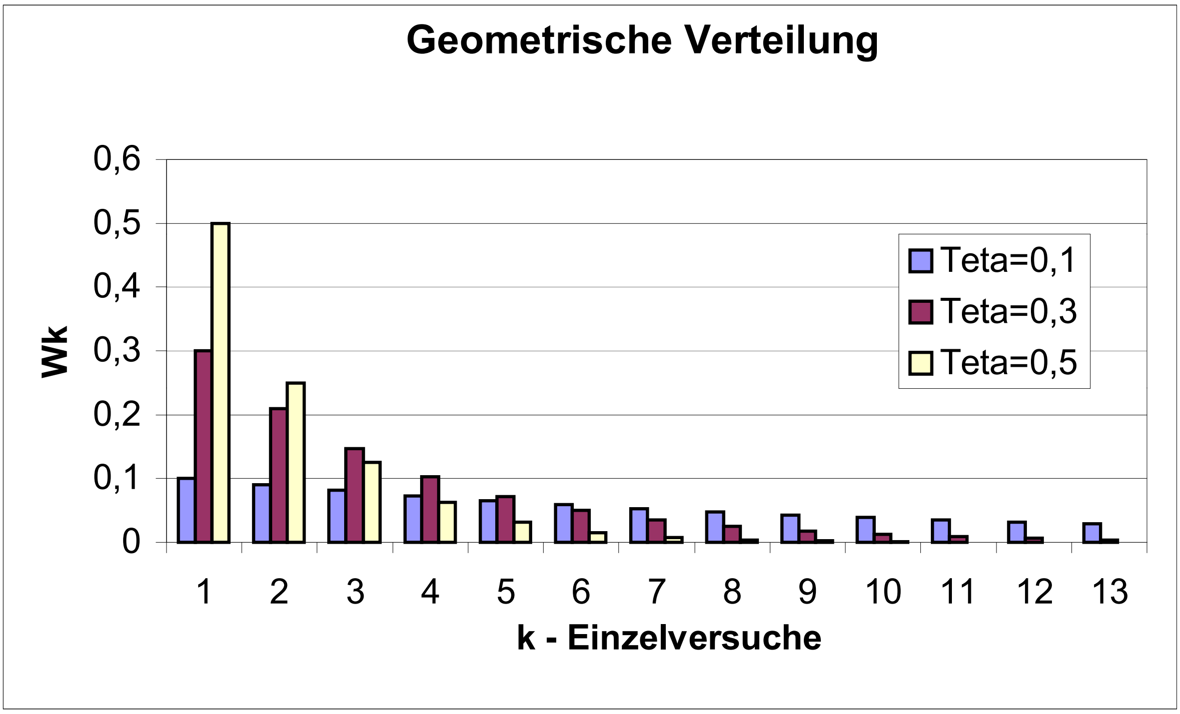
$P(\varepsilon_k) = \binom{r}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{r-k}$ für A= $\varepsilon_k = \{\omega : \sum \omega_i = k\}$

$Z \sim B(r,\vartheta)$, g.d.w. Z ist die Summe von unabhängigen ZGs $Z_1,\ldots,Z_r$ mit $Z_i \sim B(1,\vartheta)$:

Z= $\sum_{i=1}^{r} Z_i$.

Erwartungswert : $EX = r\vartheta$
Varianz : $VarX = r\vartheta(1-\vartheta)$
Schiefe : $Schiefe = \frac{1-2\vartheta}{\sqrt{r\vartheta(1-\vartheta)}}$; ist symmetrisch für $\vartheta = 1/2$

Für B(1, ϑ) gilt $P(\varepsilon_k) = \vartheta^k (1-\vartheta)^{r-k}$



Geometrische Verteilung

diskret

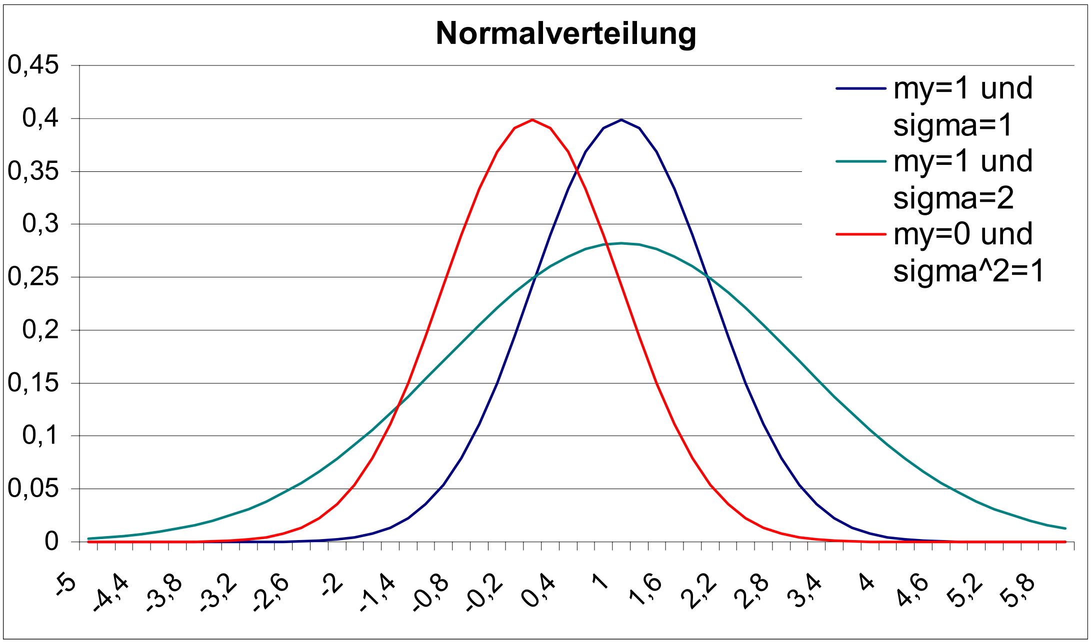
Zur Qualitätskontrolle, um festzustellen, bei welchem Versuch k der erste Defekt festgestellt wird.

$P_{\vartheta}(k) = \vartheta(1-\vartheta)^{k-1}$ ... jede Ziehung ist ein Bernoulli-Experiment

Erwartungswert : $EX = \dfrac{1}{\vartheta}$

Varianz : $VarX = \dfrac{1-\vartheta}{\vartheta^2}$

Schiefe : $Schiefe = \dfrac{2-\vartheta}{\sqrt{1-\vartheta}}$; ist immer rechtsschief



Normalverteilung *(Script Seite 56)*

<u>Kontinuierlich/stetig</u>

Die Kurve der Normalverteilung ist auch bekannt als Gaussche Glockenkurve (siehe 10DM).

$$f : R^1 -> R^+ \text{ mit } f(x;\mu;\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$N(\mu,\sigma^2)$$

Erwartungswert : EX = μ

Varianz : VarX = σ^2

Dichte : hat im Punkt μ ihr Maximum, der Wert der Dichte ist $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Wendepunkt : bei $\mu \pm \sigma$

StandardisierteNV: N(0,1) *(Script Seite 58)*

$\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$

Umrechnung auf die Standartnormalverteilung Φ(u)

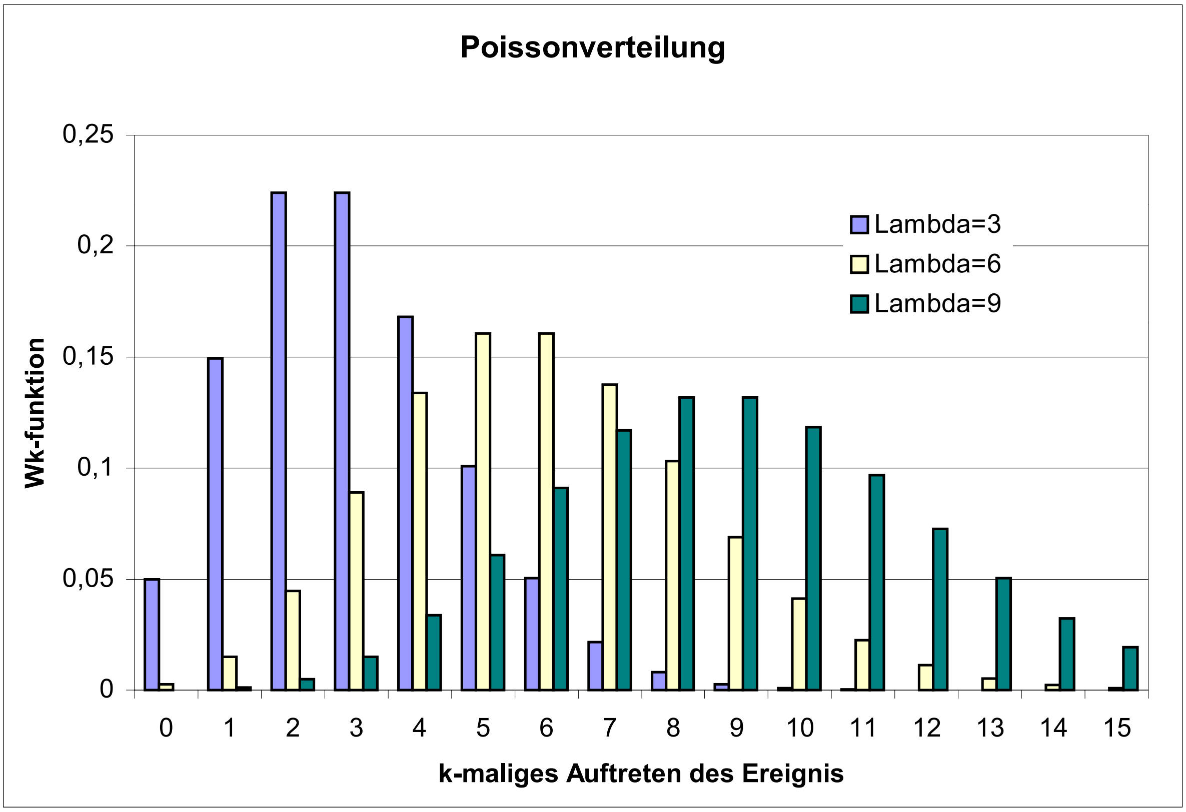
$$P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(u)$$

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$$

$$P(X > x) = 1 - P(X \le x)$$

$$x = \frac{\Phi^{-1}(P(X \le x)) * \sigma}{\mu} = \frac{\Phi^{-1}(1 - P(X > x)) * \sigma}{\mu}$$

Berechnet die Anzahl der nötigen Versuche um mindestens eine WK von P(X≤x) zu haben.



Poissonverteilung *(Script Seite 45)*

diskret

Ist für natürliche Ereignisse, die viele Versuche brauchen und eine geringe Trefferquote aufweisen.

$n\vartheta \to \lambda$ so gilt für n $\to \infty : P_n(k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ... hierbei ist k die Häufigkeit des Eintretens des Ereignisses.

Erwartungswert : EX = λ

Varianz : VarX = λ

Schiefe : $Schiefe = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Modalwert : liegt bei $[\lambda]$; ist λ ganzzahlig → Modalwert zusätzlich bei λ -1

Die Null-Eins-Verteilung *(Script Seite 39)*

diskret

$\vartheta \in (0,1)$

$P(X=1)=\vartheta \text{ und } P(X=0)=1-\vartheta$

Erwartungswert : ϑ

Varianz : $\vartheta(1-\vartheta)$

Ist auch die Zweipunktverteilung, wenn es zwei Werte ungleich 0,1 annimmt.

Exponentialverteilung *(Script Seite 60)*

Stetig

Lebensdauerverteilung oder Wartezeitverteilung

$$f_\lambda(t)=\frac{1}{\lambda}\exp(-t/\lambda)$$

$$EZ=\lambda; EZ^2=\lambda^2$$

$$EZ^3=3\lambda EZ^2$$

$$VarZ=\lambda^2=EZ^2-(EZ)^2$$

$$F_\lambda(t)=\int_0^t \frac{1}{\lambda}\exp(-u/\lambda)=1-\exp(-t/\lambda)$$

$Dichte := \frac{E(Z-EZ)^3}{\sigma^3}$; $\sigma^3=\lambda^3$

$E(Z-EZ)^3=(Z-\lambda)^3$ //An dieser stelle lasse ich das E vorne erst mal weg...taucht untern wieder auf.

$=(Z^2-2Z\lambda+\lambda^2)(Z-\lambda)$

$=Z^3-2Z^2\lambda+Z\lambda^2-Z^2\lambda+2Z\lambda^2-\lambda^3$

$=Z^3-3Z^2\lambda+3Z\lambda^2-\lambda^3$

$=Z^3-3Z^2\lambda+3Z\lambda^2-\lambda^3$

$E(Z-EZ)^3=EZ^3-3EZ^2\lambda+3EZ\lambda^2-E\lambda^3$

$EZ^3 \quad =3\lambda EZ^2=3\lambda^3$

$3EZ^2\lambda \quad =3\lambda^3$

$3EZ\lambda^2 \quad =3\lambda^3$

$E\lambda^3 \quad =\lambda^3$

$E(Z-EZ)^3=3\lambda^3-3\lambda^3+3\lambda^3-\lambda^3=2\lambda^3$

➔ Die Dichte ist immer 2.

Chi - Quadrat- Verteilung
T Verteilung
F Verteilung / Fischerverteilung

(Siehe Script: alle Seite 63 / 64)

Die bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(A|B) = \frac{k}{m} = \frac{k/n}{m/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ... $P(A|B) * P(B) = P(A \cap B)$

Multiplikationssatz: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

Unabhängigkeit: Wenn sich die Wk für A nicht ändert, nur weil B eintritt, so sind die Ereignisse unabhängig.

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Die Unabhängigkeit ist ein symmetrischer Begriff. Es sind auch $\overline{A}$ und B unabhängig:

$P(\overline{A} \cap B) = P(B \setminus A \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A})P(B)$

Rechnen mit der bedingten Wahrscheinlichkeit

Formel der totalen Wk: $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)$ bei $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, $P(B_j)>0$.

Bayessche Formel: $P(B_j|A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(B_j)P(A|B_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A|B_k)}$ solange P(A)>0 gilt. (Script S.25)

Die Verteilungsfunktion*(Script Seite 31)*

F(x)=P(X≤x):=P($\{\omega : X(\omega) \leq x\}$) … Verteilungsfunktion F von X

damit ist die Wahrscheinlichkeit für beliebige halboffene Intervalle (a,b] berechenbar.

P(X ∈ (a,b])=F(b)-F(a)

Die Verteilungsfunktion ist monoton nicht fallend. Für diskrete ZGs ist F stückweise konstant.

Stetige Zufallsvariable

Zusammenhang mit Verteilungsfunktion besteht: ist die kontinuierliche Variante. Die Verteilungsfunktion ist stetig.

<u>Verteilung mit Dichten</u>

Dichten bewerten die Punkte aus R. Aus der Dichte ist die Verteilungsfunktion bestimmt. Der wesentliche Unterschied zwischen diskreten und stetigen ZGs ist, dass bei diskreten ZG einzelne Punkte eine positive Wk haben können, bei stetigen ZG ist die Wk für jeden Punkt gleich Null.

Die Chebyshev-Ungleichung*(Script Seite 64)*

Mit Erwartungswert und Varianz Wissen über die Verteilung erhalten, ohne gesamte Wk-Verteilung der Zufallsvariablen Z zu kennen.

$P(|Z - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ bzw. $P(|Z - \mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$

Grenzwertsätze*(Script Seite 68)*

Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten braucht man gut begründete Approximationen.

<u>Bsp.1:</u>

$Y_i \sim B(1, \vartheta)$

Dann gilt: $EY_i = \vartheta$, $VarY_i = \vartheta(1 - \vartheta)$

Wir setzen: $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \Rightarrow P(S_n = k) = \binom{n}{k} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{n-k} = b_{n,\vartheta}(k)$

Das sind die Werte der Binomialverteilung B(n, ϑ).
Anwendung dieser Verteilung auf das Problem: Wie wahrscheinlich ist es, bei 80 Würfen einer Münze k=40 mal Kopf zu haben?

$\binom{80}{40}2^{-80}$ ... Somit ist nicht einmal die Größenordnung bekannt.

Zentraler Grenzwertsatz (ZGWS) für unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen

$Y_1, Y_2, \ldots$ mit $EY_i = \mu$, $VarY_i = \sigma^2 < \infty$, unabhängig.

↳standardisierte Summe: $V_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ mit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$: $P(V_n \le x) \to \Phi(x)$ für N $\to \infty$,

wobei Φ die Verteilungsfunktion der N(0,1)-Verteilung ist.

Bsp.2:
n=80 ist so groß, dass ZGWS auf $Y_1,\ldots,Y_{80}$ angewendet werden kann. Dann ist nach ZGWS die Verteilung S_{80} approximativ N(80 ϑ,80 ϑ (1-ϑ)) verteilt, und das für ϑ=1/2, d.h.

$$P\left(\frac{S_{80} - 80\vartheta}{\sqrt{80\vartheta(1-\vartheta)}}\right) = P(V_{80} \le x) \approx \Phi(x) \Rightarrow$$

$$P\left(S_{80} \le 80\vartheta + x\sqrt{80}\sqrt{\vartheta(1-\vartheta)}\right) \approx \Phi(x) \Rightarrow$$

$$P\left(S_{80} \le 40 + x\sqrt{20}\right) \approx \Phi(x)$$

Die beiden Ergebnisse S_{80}=40 und 39<S_{80}<=40 sind identisch mit der oberen Gleichung ➔

$$P(S_{80} = 40) \approx \Phi(0) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 0.08847$$

Eine Approximation der Verteilungsfunktion ϕ mit der Gauß-Dichte ergibt:

Binomialverteilung: $P(S_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}} \exp\left(-\frac{(k-n\vartheta)^2}{2n\vartheta(1-\vartheta)}\right)$

Gesetz der großen Zahlen

Verhalten des arithmet. Mittels für große n

$\{Y_n\}$ ist eine Folge von ZGs

$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ ist das arithm.Mittel aller Y_i und gilt wenn nur nach dem Gesetz der großen Zahlen.

Teil II

Statistik

Zeichenerklärung I

Ω............. sicheres Ereignis
$\varnothing$............ unmögliches Ereignis
A.............. Ereignis (allg.: große lat. Zeichen)
P............... Wahrscheinlichkeitsmaß
ZG............ Zufallsgröße
Wk........... Wahrscheinlichkeit
X(ω)....... ω wird ein reeller Wert zugeordnet
x............... Realisierung : X(ω)=x
ω............ Elementarereignis
ϑ............ Erfolgs-Wk (griech.:Theta)

μ........ ... Erwartungswert (griech.:My)
σ^2....... ... Varianz (griech.:Sigma)
$\sqrt{\sigma^2}$... ... Standardabweichung
k........... ... Anzahl der Erfolge
r............ ... Zahl der Wiederholungen
B(r, ϑ). ... Notation für Binomialverteilung
N(μ,σ^2)... Notation für Normalverteilung

Zeichenerklärung II

$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ ...arithmetisch Mittel alle Y_i.
$V_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ....??? (beides aus...
$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ .....??? Gesetz der großen Zahlen)
$y_1,...,y_n$ ....Realisierungen : $Y_i(\omega)=y_i$
$Y_1,...,Y_n$ ....zufällige Variablen, Stichprobe vom Umfang n (wenn unabhängig und identisch verteilt)
F^Z.....................Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße Z
P^Z.....................Verteilung in der Grundgesamtheit von Z
$\wp$.....................statistisches Modell => Menge von Möglichen Verteilungen => Parameter wie Erwartungswert und Varianz sind unbekannt
$P^Z \in \wp$ **.........**eine Klasse von möglichen Verteilungen
T......................Schätzer, Schätzfunktion
T(Y).................Schätzvariable
T(y)..................Schätzung, Schätzwert
$E_\vartheta T(Y)$ ....Approximation für den Parameter „Erwartungswert" der Schätzfunktion
$\gamma(\vartheta)$ ....Schätzfunktion von $\vartheta \approx T(y) \mid \gamma = 1/\sqrt{\lambda}$ (nach Script S.46) / der zu schätzende Wert
EY_i...................Erwartungswert der einzelnen Stichprobe (*unbekannt*)
ε.....................ist eine Umgebung mit möglichst kleinem ε
$s_n^2(Y)$ ....Stichprobenvarianz
Θ ....Parameterraum
$\{T_n\}$ ....Menge von Folgen
χ ....Stichprobenquadrat
Ausdrücke mit ^ sind (Ab-)Schätzungen, während das ~ über einem Zeichen nur der Unterscheidung dient.

Beispiel 7.1
Aus der laufenden Produktion werden zufällig und unabhängig voneinander n Federn genommen. Bei jeder Feder wird festgestellt: 0 – defekt oder 1 – in Ordnung.

Es entstehen Werte $y_1,...,y_n$ mit $y_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$.

↳ $y_i = Y_i(\omega)$ für unabhängige $Y_i \sim B(1,p)$

↳ $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ ist nahe an p

Schätzverfahren*(Script Seite 75)*

Erwartungstreue

Ein Schätzer T heißt erwartungstreu für γ, falls $E_\vartheta T(Y) = \gamma(\vartheta) \quad \forall \vartheta \in \Theta$

Konsistenz

Schätzfolge $T_1, T_2, ...$ heißt für γ *(schwach)* konsistent, falls für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $\vartheta \in \Theta$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P_\vartheta\left(\left|T_n\left(y_{(n)}\right) - \gamma(\vartheta)\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Stichprobenmittel

$EY_i = \mu$ und $VarY_i = \sigma^2$ (*beide sind unbekannt*) ; aus der Wahrscheinlichkeit : $EY = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i$

$$\overline{Y}_n = \tfrac{1}{n}(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n) \Leftrightarrow T(y_1,...,y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\Rightarrow E\overline{Y}_n = \tfrac{1}{n}(EY_1 + EY_2 + ... + EY_n) = \tfrac{1}{n}(\mu + \mu + ... + \mu)$$

$$\Rightarrow E_\vartheta T(Y) = E\overline{Y}_n = \mu = \gamma(\vartheta)$$

Das Stichprobenmittel ist ein **erwartungstreuer Schätzer** für μ.

Tschebyshev

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung : VarY = $\sum_i (x_i - EX)^2 p_i = \sigma^2$

$$Var\overline{Y}_n = \frac{1}{n^2}\left(VarY_1 + VarY_2 + ... + VarY_n\right) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Das Stichprobenmittel ist mit wachsendem **n** ein **konsistenter Schätzer** für μ.

Für ein beliebig kleines ε strebt

$$P\left(\mu - \varepsilon < \overline{Y}_n < \mu + \varepsilon\right) \rightarrow_n 1, \text{da } P\left(\left|\overline{Y}_n - \mu\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \textbf{ (Tschebyshev)}$$

Mit beliebig großer Wahrscheinlichkeit liegt $\overline{Y}_n$ beliebig nahe an μ (für genügend großes n).

Stichprobenvarianz

$s_n^2(Y)$ ist die Stichprobenvarianz

$$s_n^2(Y) = \frac{1}{n-1}\left[(Y_1 - \overline{Y}_n)^2 + (Y_2 - \overline{Y}_n)^2 + \ldots + (Y_n - \overline{Y}_n)^2\right]$$

$$Es_n^2(Y) = \frac{1}{n-1}\left[E(Y_1 - \overline{Y}_n)^2 + E(Y_2 - \overline{Y}_n)^2 + \ldots + E[(Y_i - \mu) - (\overline{Y}_n - \mu)]^2 + \ldots + E(Y_n - \overline{Y}_n)^2\right]$$

wobei $E(Y_i - \overline{Y}_n)^2 = E[(Y_i - \mu) - (\overline{Y}_n - \mu)]^2 = \sigma^2 - 2\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = \sigma^2 \frac{n-1}{n}$.

$$Es_n^2(Y) = \sigma^2$$

Stichprobenkovarianz

$$T_{n3}(y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left((y_{i1} - \overline{y}_{n1})(y_{i2} - \overline{y}_{n2})\right)$$

Beispiel 7.3

Gegeben seien folgende Beobachtungen:
1,280 ; 2,397 ; 3,999 ; 0,9506 ;
2,656 ; 1,882 ; 1,897 ; 1,378 ;
1,475 ; 3,568 ; 0,4591 ; 0,4424 ;
1,492 ; 2,174 ; 2,228 ; –1,264

arithmet. Mittel=**a**

a = (1,280+2,397+3,999+0,9506+2,656+
1,882+1,897+1,378+1,475+3,568+
0,4591+0,4424+1,492+2,174+2,228+
(–1,264)) / 16
=1,68838125

Stichprobenmeridian=**c**

c=(1,429+1,882)/2=1,687

Stichprobenvarianz= $s_n^2(Y)$ =**b**

b= $\frac{1}{16-1}\left[(1{,}280-a)^2 + (2{,}379-a)^2 + \ldots + (-1{,}264-a)^2\right]$
=1,572670867

Spannweite=**d**

d=3,999+(-1,264)=5,263

MSE / mittlerer quadratischer Abstand*(Script Seite 81)*

$MSE_\vartheta(T) = Var_\vartheta(T) + [E_\vartheta T - \gamma(\vartheta)]^2$ MSE ist die Varianz + das Quadrat der Verzerrung(Bias)
Für Erwartungstreue Schätzer ist der Bias = 0

Konstruktion von Schätzern*(Script Seite 83)*

Maximum-Likelihood-Schätzung für Y_1 bis Y_n unabhängige ZG

$$f_\vartheta(y_1,...,y_n) = P(Y_1 = y_1,...,Y_n = y_n) = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i = y_i)$$

$$MSL(\vartheta) = \max(f_\vartheta(y_1,...,y_n)) = \text{Ableitung nach } \vartheta \text{ bilden}$$

α-Quantile*(Script Seite 88)*

mindestens $\alpha * n$ liegen im Intervall $(-\infty, q_\alpha]$ und

mindestens $(1-\alpha) * n$ liegen im Intervall $[q_\alpha, \infty)$

Quartile $q_{\frac{1}{4}}, q_{\frac{2}{4}}, q_{\frac{3}{4}}$ Dezile $q_{\frac{1}{10}}, \ldots, q_{\frac{9}{10}}$

Konfidenzintervalle*(Script Seite 88)*

$$I(Y) = \left[\overline{Y} - \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot |t_{n-1}|_\alpha \cdot \hat{\sigma}(Y), \overline{Y} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot |t_{n-1}|_\alpha \cdot \hat{\sigma}(Y) \right]$$

$$P(I(Y) \ni \mu) = 1 - \alpha$$

$|t_{n-1}|_\alpha$ aus Tabelle ablesen, $\hat{\sigma}(Y)$ gegeben

<u>Beispiel:</u>
Quantile und Konfidenzintervalle
Gegeben seien die konkreten Werte $y_1,...,y_{12}$:
-1.534, -1.406, -1.112, -0.8289, -0.7342, -0.04339, 0.1157, 0.2960, 0.6996, 0.7341, 0.7941, 0.9374
Diese Werte seien unabhängige Realisierungen von normalverteilten Variablen $Y_i \sim (\mu, \sigma^2)$ für unbekannte μ, σ.

- Bestimmen Sie die Quartile dieser Beobachtung
- Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall I(y) für μ zum Niveau 0.95. Benutzen Sie dabei, dass $\overline{y}$ =0.177 und $\hat{\sigma}^2$ =0.749 ist. Erklären Sie verbal die Bedeutung des errechneten Intervalls.

  Was bedeutet dieses Intervall, wenn man weiß, dass die Beobachtungswerte Realisierungen einer (0,5; 1)-Verteilung sind?

a) Quartile:

$\alpha = \frac{1}{4}k$; $k = 1,2,3,4$

Allgemein: in $(-\infty, q_\alpha]$ liegen $n\alpha$ Relisierungen
in $[q_\alpha, +\infty)$ liegen $n(1-\alpha)$ Realisierungen

$q_{1/4} = ?$

$12 * \alpha = 12 * 1/4 = 3$ *und* $12 * 3/4 = 9$

$$\Rightarrow q_{1/4} \in [-1{,}112; -0{,}8289]$$
$$\Rightarrow q_{2/4} \in [-0{,}04339; 0{,}1157]$$
$$\Rightarrow q_{3/4} \in [0{,}6996; 0{,}7341]$$
$$\Rightarrow q_{4/4} \text{ ist trivial (?)}$$

b)

$$P(\mu \in I(y)) = 1 - \alpha$$
$$\mu = 1 - \alpha$$
$$\alpha = 0{,}05$$

Konfidenzintervall I(y) bei n=12. Gesucht ist hierbei das Intervall, in dem zu 95% der Wert μ liegt. Sowohl die Werte als auch die Formel zur Berechnung des Konfidenzintervalls sind weiter oben im Dokument. Mit den nun folgenden Werten bleibt nichts weiter zu tun, als diese einzusetzen und man hat das Intervall:

$$I(y) = [-0{,}726, 0{,}373]$$

Wenn diese Stichprobe von einer N(0:5; 1)-Verteilung stammen soll, so ist diese Stichprobe eine nicht repräsentative, denn nur 5 Prozent aller Stichproben vom Umfang 12 enthalten nicht den wirklichen Erwartungswert 0.5

Kleinste Quadratische Schätzung (KQS) *(Script Seite 91)*

Meist durch Polynomklasse abgeschätzt

$$P_k(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_k x^k$$

für $(k = 0)$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

für $(k = 1)$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}((x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}))}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$