Grundlagen der technischen Informatik **Übungsblatt 1**

Aufgabe 1

Man beweise durch Induktion über n, daß es 2^{2^n} Boolesche Funktionen von n Variablen gibt.
Man verwende dabei:

$$f(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n) = x_n \wedge f(x_1,\ldots,x_{n-1},1) \vee \overline{x}_n \wedge f(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$$

Aufgabe 2

a) Man bestimme $f_{15} \oplus f_{127}$ und $f_{15} \vee f_{127}$.
b) Man bestimme für n=10:
$f_0(x) \oplus f_1(x) \oplus \ldots \oplus f_{2^{2^n}-1}(x)$ und $f_0(x) \equiv f_1(x) \equiv \ldots \equiv f_{2^{2^n}-1}(x)$

Aufgabe 3

Es sei $f(x_1,\ldots,x_{10})$ eine Boolesche Funktion von 10 Variablen, deren 10 Werte

$$f(1,0,0,\ldots,0) = f(0,1,0,\ldots,0) = \ldots = f(0,0,0,\ldots,1) = 1$$

festgelegt sind. Alle anderen Funktionswerte seien unbekannt.
Wieviele derartige Funktionen gibt es? Wieviele Funktionen gibt es, wenn f für 100 Werte festgelegt wird?

Aufgabe 4

Beweisen Sie die Gleichungen $\overline{xy \vee \overline{xy}} = x \oplus y$ und $x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x}_2 \rightarrow \overline{x}_1$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie, wie viele Boolesche Funktionen es gibt, die *wesentlich* von 4 Variablen abhängen.

Aufgabe 6

Man zeige mit Hilfe einer Wertetafel, daß folgende Gesetze gelten:

a) Assoziativgesetz: $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$
b) Distributivgesetz: $x_1(x_2 \vee x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3$

Aufgabe 7

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke soweit wie möglich:

a) $ab\left(\overline{ab\overline{c}}\right)$
b) $(\overline{x}_1 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3) \vee (x_1 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_1x_3x_4)$
c) $\overline{x}y\overline{z} \vee x(\overline{y}z \vee \overline{y}\overline{z}) \vee \overline{x}yz$

Lösungen:

Aufgabe 1

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = x_n \wedge \underbrace{f(x_1,\dots,x_{n-1},1)}_{2^{2^n}} \vee \bar{x}_n \wedge \underbrace{f(x_1,\dots,x_{n-1},0)}_{2^{2^n}}$$

Diese beiden Werte miteinander kombiniert müssen wiederum 2^{2^n} ergeben.

$$2^{2^{n-1}} \cdot 2^{2^{n-1}} = 2^{\left(2^{n-1}+2^{n-1}\right)} = 2^{2\cdot 2^{n-1}} = 2^{2^n}$$

Aufgabe 2

a)

$wenn$	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	$, dann$
f_{15}	1	1	1	1	0	0	0	0	
f_{127}	1	1	1	1	1	1	1	0	
$f_{15} \oplus f_{127}$	0	0	0	0	1	1	1	0	$= f_{112}$
$f_{15} \vee f_{127}$	1	1	1	1	1	1	1	0	$= f_{127}$

b) Bei 2^{2^n} Funktionen kommt in jeder Zeile einer Wertetabelle zur Hälfte 0 und zur Hälfte 1 vor. diese werden dann (da kommutativ) in eine geordnete Reihenfolge gebracht.

$\oplus \quad 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \qquad \Rightarrow \quad f_{\oplus} = 0; f_{\equiv} = 1$

Bei der Antivalenz nimmt die letzte Funktion der Folge an jeder Position die 0 und die Äquivalenz an jeder Stelle die 1 an.

Aufgabe 3

Es gibt einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der möglichen Kombinationen aus *n* Elementen und der daraus resultierenden Anzahl von Funktionen.

n Elemente $\Rightarrow$ 2^n Kombinationen der Elemente $\{0;1\}$ $\Rightarrow$ 2^{2^n} Funktionen $\{0;1\}$

10 Elemente werden aus 2^n herausgenommen, daher ist die Anzahl der möglichen Funktionen $2^{\left(2^n-10\right)}$

$2^{\left(2^n-10\right)} = 2^{1024}$, bei n=10

Bei n=100 $\quad\Rightarrow\quad$ $2^{\left(2^n-100\right)} = 2^{924}$

Aufgabe 4

a) Die Aufgabe kann durch Erstellen einer Wertetabelle gelöst werden.

x	y	$x \wedge y$	$\bar{x} \wedge \bar{y}$	$xy \vee \bar{x}\bar{y}$	$\overline{xy \vee \bar{x}\bar{y}}$	$x \oplus y$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

$\underline{\underline{\overline{xy \vee \bar{x}\bar{y}} = x \oplus y}}$ w.z.b.w.

Aufgabe 5

Voraussetzung: A_n sei die Menge aller wesentlich von *n* abhängigen Funktionen f. Der Term in der Klammer ist hier der Binominalkoeffizient.

$$A_n = 2^{2^n} - \binom{n}{n-1} \cdot A_{n-1} - \ldots - \binom{n}{1} \cdot A_1 - A_0 \quad \text{, dabei ist } A_0 = 2; A_1 = 2; A_2 = 10; A_3 = 218$$

$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad A_4 = 2^{2^4} - \binom{4}{3} \cdot A_3 - \binom{4}{2} \cdot A_2 - \binom{4}{1} \cdot A_1 - 2 = 65536 - 4 \cdot 218 - 6 \cdot 10 - 8 - 2$$

$$\underline{\underline{A_4 = 64594}}$$

64594 Boolesche Funktionen hängen wesentlich von 4 Variablen ab.

Aufgabe 6

a) und b) wird hier fallen gelassen, da das Prinzip der Wertetabelle nun klar sein dürfte.

Aufgabe 7

a) $ab\left(\overline{ab\bar{c}}\right) = ab\left(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c\right) = ab\bar{a} \vee ab\bar{b} \vee abc$, da $x\bar{x} = 0$

$\underline{\underline{ab\left(\overline{ab\bar{c}}\right) = abc}}$

b) $\left(\bar{x}_1 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\right) \vee \left(x_1 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\right)\left(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4\right) = \left(\bar{x}_1 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\right) \vee \left(\bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\right)$

$= \bar{x}_1 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4$, da $\bar{x}_1 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 = \bar{x}_1$

$\underline{\underline{= \bar{x}_1 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}}$

c) $\bar{x}y\bar{z} \vee x\left(\bar{y}z \vee \bar{y}\bar{z}\right) \vee \bar{x}yz = \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz = \bar{x}y\left(\bar{z} \vee z\right) \vee x\bar{y}\left(z \vee \bar{z}\right)$

$= \bar{x}y \vee x\bar{y} \underline{\underline{= x \oplus y}}$