Grundlagen der technischen Informatik **Übungsblatt 6**

Aufgabe 23

a) Geben sie Wertetafeln für folgende vollständig symmetrischen dreistelligen Funktionen an!
$S_{0,2}\{x_1, x_2, x_3\}, S_{0,3}\{x_1, x_2, x_3\}, S_1\{x_1, x_2, x_3\}$

b) Wieviele vollständig symmetrische Funktionen von n Variablen gibt es? Begründen Sie!

c) Nennen Sie eine zweistellige Funktion, die <u>nicht</u> vollständig symmetrisch ist!

Aufgabe 25

Für eine Boolesche Funktion f bezeichne f^* die duale Funktion.

a) Beweisen Sie: f ist genau dann in K_0, wenn f^* in K_1 ist.

b) Finden Sie für $f(x_1, x_2) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2$ die duale Funktion $f^*(x_1, x_2)$ und stellen Sie diese in der antivalenten Normalform (Reed-Muller-Form) dar. (c_0, c_1, c_2 sind Konstanten aus $\{0,1\}$.)

Aufgabe 26

a) Teilen Sie die folgenden 7-Tupel in drei Mengen ein, je nachdem, ob sie kleiner als, größer als oder unvergleichbar mit (0110100) sind.

(1110100),(1100111),(0111100),(0000100),(0001000),(0010000),(0110101),(0101010)

b) f sei eine monotone Funktion mit $f(0110100) = 1$. Auf welche der drei Mengen sind dann die Funktionswerte von f bereits festgelegt?

Aufgabe 27

Betrachten Sie die Funktionsmenge $P = \{\equiv, \vee, 0\}$. Zeigen Sie, daß P die Voraussetzungen des Jablonski-Theorems erfüllt. Ist P eine minimale Basis?
(Hinweis: Sie können die Tabelle aus Aufgabe 21 A) bzw. aus der Übung verwenden.)

Aufgabe 28

f sei die dreistellige Boolesche Funktion mit $f(x, y, z) = xy \oplus z \oplus xyz$. Finden Sie Wertepaare $(y_1, z_1), (x_2, z_2)$ und (x_3, y_3), für die die folgenden Ungleichungen gelten:

$f(0, y_1, z_1) \neq f(1, y_1, z_1) \quad f(x_2, 0, z_2) \neq f(x_2, 1, z_2) \quad f(x_3, y_3, 0) \neq f(x_3, y_3, 1)$

Aufgabe 23

a)

x_1	x_2	x_3	$S_{0,2}$	$S_{0,3}$	S_1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0

b) Es gibt 2^{n+1} vollständig symmetrische Funktionen von n Variablen.

Beweis: Man betrachtet die a-Zahlen, welche jeweils zu dem S gehören. Von ihnen gibt es immer eine mehr, als es Variablen gibt, daher $n+1$. Die Kombination aus $n+1$ mit $\{0;1\}$ ergibt 2^{n+1}.

c) $f_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1$

x_1	x_2	f_3
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Diese Funktion ist nicht vollständig symmetrisch. Wäre sie es, so muüßte man für x_1 die Variable x_2 einsetzen können und das gleiche Ergebnis erhalten. Dies ist hier nicht der Fall. Auch die Anwendung der negierten Variable bringt keinen Erfolg. Außerdem wäre es dann keine vollständige Symmetrie.

Aufgabe 25

a) Eine duale Funktion zu f wird wie folgt gebildet: $f^* = f_d = \bar{f}(\bar{x})$

Wenn f^* in K_1 ist, dann gilt: $f^* = 1 = f^*(1,...,1) = \bar{f}(\bar{0},...,\bar{0})$

Führt man dies weiter, so erhält man: $f(0,...,0) = 0$

Damit ist gezeigt, daß f in K_0 liegt, wenn f^* in K_1 liegt. Der Beweis läßt sich von beiden Richtungen durchführen und läßt den Schluß zu, daß f in K_1, wenn f^* in K_0.

b) $f(x_1, x_2) = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus c_2 x_2$

$f^* = \overline{(1 \oplus c_0) \oplus (1 \oplus c_1 x_1) \oplus (1 \oplus c_2 x_2)} = f$

Aufgabe 26

a) Menge der Größeren: (1110100),(0110101),(0111100)
Menge der Kleineren: (0000100),(0010000)
Menge der Unvergleichbaren: (0101010),(0001000),(1100111)

Zwei zu vergleichende Funktionen werden Tupel-weise verglichen. Ist die Anordnung von größer oder kleiner als immer in die selbe Richtung, so kann man sagen die eine ist größer oder kleiner als die andere Funktion. Wechselt die Richtung jedoch und es kommt somit zu einem Widerspruch, so sind die beiden Funktionen unvergleichbar.

$$(1110100) \quad (0110101) \quad (0111100)$$

b) zuerst folgende Skizze:

$$(0110100)$$

$$(0000100) \qquad\qquad (0010000)$$

Es wird von unten nach oben verglichen. Der nächsthöhere muß immer größer gleich seinem Vorgänger sein. Da der Wert in der Mitte bereits auf 1 festgelegt ist, müssen alle Nachfolger, sprich die Menge der Größeren, ebenfalls 1 sein und sind somit eindeutig festgelegt.

Aufgabe 27

a) $P = \{\equiv, \vee, 0\}$

$\equiv$	$\notin$	K_0		K_{sd}	K_{mon}	
$\vee$	$\notin$			K_{sd}		K_{lin}
0	$\notin$		K_1	K_{sd}		

Alle 5 Bedingungen des Jablonski-Theorems sind erfüllt, daher ist P eine Basis.

c) Es ist eine minimale Basis, da sich keine der Funktionen aus der Menge entfernen läßt. Würde Man dies tun, so wäre P keine Basis mehr, da alle 3 Funktionen benötigt werden, um das Jablonski-Theorem zu erfüllen.

Aufgabe 28

x_1	x_2	x_3	f		
0	0	0	0	$f(0, y_1, z_1) \neq f(1, y_1, z_1) \Rightarrow f(010) \neq f(110)$	
0	0	1	1	$\mapsto y_1 = 1 \quad z_1 = 0$	
0	1	0	0	$f(x_2, 0, z_2) \neq f(x_2, 1, z_2) \Rightarrow f(100) \neq f(110)$	
0	1	1	1	$\mapsto x_2 = 1 \quad z_2 = 0$	Nur eine Variante!
1	0	0	0	$f(x_3, y_3, 0) \neq f(x_3, y_3, 1) \Rightarrow f(000) \neq f(001)$	
1	0	1	1	$\mapsto x_3 = 0 \quad y_3 = 0$	
1	1	0	1		
1	1	1	1		