Grundlagen der technischen Informatik **Übungsblatt 7**

Aufgabe 29

Beweisen Sie, daß die Klasse K_1 prävollständig ist!

Aufgabe 30

Ist $f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_2 \oplus x_3$ eine Sheffer-Funktion?

Aufgabe 31

Für jede Boolesche Funktion $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ gilt $\frac{df}{dx_i} = f \oplus f_{x_i := \bar{x}_i}$.

a) f und g seien zwei n - stellige Boolesche Funktionen. Zeigen Sie, daß dann folgendes gilt:

$$\frac{d(f \wedge g)}{dx_1} = f \frac{dg}{dx_1} \oplus g \frac{df}{dx_1} \oplus \frac{df}{dx_1} \frac{dg}{dx_1}$$

b) Berechnen Sie $\frac{df}{dx_1}$, $\frac{d^2 f}{dx_1 dx_2}$, $\frac{d^3 f}{dx_1 dx_2 dx_3}$ für $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$

Aufgabe 32

Die Funktionen $\wedge, \vee, \neg$ können auf der Menge $\{0,1\}$ als logisches „UND“, „ODER“ bzw. „NICHT“ interpretiert werden, wenn wir 0= „Falsch“ und 1= „Wahr“ setzen.

a) Verallgemeinern Sie diese Funktionen auf die dreielementige Menge $\{0,1,u\}$ (Wertetabelle), wobei u als „Unbekannt“ zu interpretieren ist!

b) Untersuchen Sie, ob die Gesetze $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ und $x \vee \bar{x} = 1$ bei dieser Verallgemeinerung immer noch gelten!

c) Kann man aus diesen Funktionen alle Funktionen auf der Grundmenge $\{0,1,u\}$ erzeugen? (Begründung!)

Aufgabe 33

Finden Sie für die Funktion $f(x_0, x_1, y_0) := \begin{cases} x_0 \text{ wenn } y_0 = 0 \\ x_1 \text{ wenn } y_0 = 1 \end{cases}$ eine (einfache!) DNF und geben Sie ein dazugehöriges (so weit wie möglich vereinfachtes!) Schaltbild an!

Aufgabe 29

Behauptung: K_1 ist prävollständig

Es ist zu zeigen: für alle $f \in K_1$ gilt: $K_1 \cup \{f\}$ ist vollständig

Beweis:
- $f \notin K_1 \Rightarrow f(1,1,1,...,1) = 0$
- $1 \in K_1 \Rightarrow$ Konstante 0 ist aus $K_1 \cup \{f\}$ ableitbar
- $\rightarrow \in K_1$, $\bar{x} = x \rightarrow 0$, Negation ebenfalls ableitbar aus $K_1 \cup \{f\}$
- $\wedge \in K_1$, also ist $\{\neg, \wedge\}$ ableitbar und selbst eine Basis, daher können alle anderen Funktionen abgeleitet werden

Schlußfolgerung: $K_1 \cup \{f\}$ ist vollständig und K_1 ist prävollständig

Aufgabe 30

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Es läßt sich durch das Betrachten der Wertetabelle folgendes erkennen:

$$f \notin K_0, K_1, K_{sd}, K_{mon}$$

Beim Betrachten der Formel fällt auf:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus \underline{x_1 x_2 x_3} \oplus x_2 \oplus x_3 \Rightarrow f \notin K_{lin}$$

Es folgt: f gehört keiner der fünf Klassen an und ist daher eine Sheffer-Funktion.

Aufgabe 31

a)
$$\frac{d(f \wedge g)}{dx_i} = (f \wedge g) \oplus \left(f_{x_i := \bar{x}_i} \wedge g_{x_i := \bar{x}_i}\right) \Rightarrow f_{x_i := \bar{x}_i} = f \oplus \frac{df}{dx_i}$$

$$= (f \wedge g) \oplus \left[\left(\frac{df}{dx_1} \oplus f\right) \wedge \left(\frac{dg}{dx_1} \oplus g\right)\right] = \left(\overline{\bar{f} \vee \bar{g}}\right) \oplus \left[\overline{\overline{\left(\frac{df}{dx_1} \oplus f\right)} \vee \overline{\left(\frac{dg}{dx_1} \oplus g\right)}}\right]$$

$$= \underbrace{\left(\overline{\bar{f} \oplus \bar{g} \oplus \bar{f}\,\bar{g}}\right)}_{a)} \oplus \underbrace{\left[\overline{\overline{\left(\frac{df}{dx_1} \oplus f\right)} \oplus \overline{\left(\frac{dg}{dx_1} \oplus g\right)} \oplus \overline{\left(\frac{df}{dx_1} \oplus f\right)}\,\overline{\left(\frac{dg}{dx_1} \oplus g\right)}}\right]}_{b)}$$

a) $$= 1 \oplus \bar{f} \oplus \bar{g} \oplus \bar{f}\,\bar{g} = 1 \oplus 1 \oplus f \oplus 1 \oplus g \oplus (1 \oplus f) \wedge (1 \oplus g) = f g$$

b) $$= 1 \oplus \frac{df}{dx_1} \oplus f \oplus 1 \oplus \frac{dg}{dx_1} \oplus g \oplus \left(1 \oplus \frac{df}{dx_1} \oplus f\right) \wedge \left(1 \oplus \frac{dg}{dx_1} \oplus g\right)$$

$$= f \frac{dg}{dx_1} \oplus g \frac{df}{dx_1} \oplus \frac{df}{dx_1} \frac{dg}{dx_1} \oplus f g$$

$$= f\,g \oplus f\,\frac{dg}{dx_1} \oplus g\,\frac{df}{dx_1} \oplus \frac{df}{dx_1}\frac{dg}{dx_1} \oplus f\,g = \underline{\underline{f\,\frac{dg}{dx_1} \oplus g\,\frac{df}{dx_1} \oplus \frac{df}{dx_1}\frac{dg}{dx_1}}}$$

b) $\frac{df}{dx_1} = x_2 \oplus x_3$ $\qquad \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} = (x_3) \oplus (1 \oplus x_3) = 1$ $\qquad \frac{d^3 f}{dx_1 dx_2 dx_3} = 0$

Aufgabe 32

a)+b)

x_1	x_2	$\wedge$	$\vee$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$	$x_1 \vee \overline{x}_1$	$x_2 \vee \overline{x}_2$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	u	0	u	1	u	0	1	u
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	u	u	1	0	u	u	1	u
u	0	0	u	u	1	0	u	1
u	1	u	1	u	0	u	u	1
u	u	u	u	u	u	u	u	u

Der Tabelle läßt sich entnehmen, daß $x_1 \wedge x_2 = \overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$ aber nicht $x \vee \overline{x} = 1$.

c) Keine Ahnung!!!

Aufgabe 33

$DNF:\quad f(x_0, x_1, y_0) = x_1 y_0 \vee x_0 \overline{y}_0$ Schaltbild ist klar!