Grundlagen der technischen Informatik **Übungsblatt 8**

Aufgabe 34

Es sei $g(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1) := \begin{cases} x_0 \;\; falls \; (y_1, y_0) = (0{,}0) \\ x_1 \;\; falls \; (y_1, y_0) = (0{,}1) \\ x_2 \;\; falls \; (y_1, y_0) = (1{,}0) \\ x_3 \;\; falls \; (y_1, y_0) = (1{,}1) \end{cases}$

a) Finden Sie eine kleine DNF für *g* und geben Sie ein Schaltbild an, das dieser Darstellung entspricht.

b) In Aufgabe 33 wurde eine Schaltung für $f(x_0, x_1, y_0) := \begin{cases} x_0 \;\; wenn \;\; y_0 = 0 \\ x_1 \;\; wenn \;\; y_0 = 1 \end{cases}$ entwickelt.

Bezeichnen Sie diese Schaltung mit *M* und zeigen Sie, wie man aus drei dieser Schaltungen eine Schaltung für *g* aufbauen kann.

Aufgabe 35

Gegeben seien folgende dreistellige Funktionen:

$f_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$

$f_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \oplus x_1)} \vee (x_2 \wedge \bar{x}_3)$

Stellen Sie diese Funktionen graphisch auf dem Booleschen Würfel dar. (Markieren Sie dazu diejenigen Ecken des Würfels farbig, an denen die Funktion den Wert 1 annimmt.)
Kennzeichnen Sie die maximalen Intervalle, die zu diesen Funktionen gehören und geben Sie die zugehörigen Elementarkonjuktionen an.

Aufgabe 36

Wieviele zweistellige Funktionen auf einer *k*-elementigen Grundmenge gibt es? (Begründung!)
Berechnen Sie diese Anzahl für *k*=2,3,...,10 ! (Bei größeren Werten Abschätzungen mit zwei führenden Stellen.)

Aufgabe 37

Eine dreistellige Funktion *f* sei auf dem Booleschen Würfel dargestellt. Woran erkennt man, ob eine Variable x_1, x_2, x_3 fiktiv ist? Woran erkennt man, ob *f* bezüglich $\{x_1, x_2\}$ symmetrisch ist?

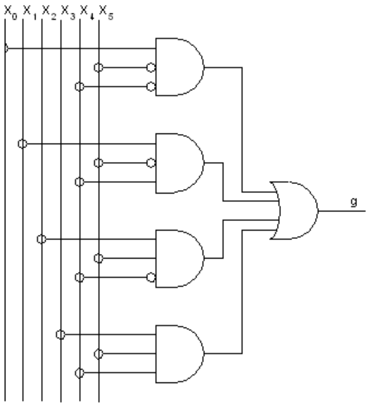
Aufgabe 38

Stellen Sie $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(x_1 x_2 \overline{x_3 x_4} \oplus x_1 \bar{x}_4\right) x_1 x_2 x_3 \vee \overline{\left(x_1 x_2 \overline{x_3 x_4} \oplus x_1 \bar{x}_4\right)}\, \overline{x_1 x_2 x_3}$ in der Reed-Muller Form dar, bilden Sie dann die Boolesche Ableitung $\frac{df}{dx_4}$ und finden Sie dafür eine minimale DNF!

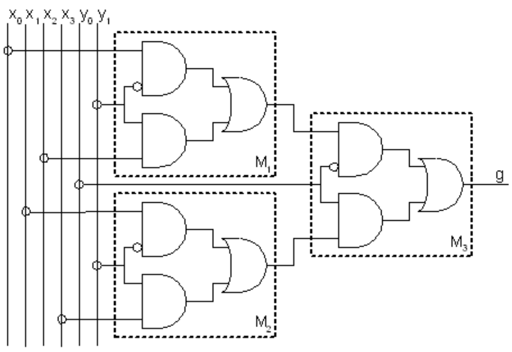
Lösungen

Aufgabe 34

a) $DNF: \quad g(x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1) = x_0\overline{y}_1\overline{y}_0 \vee x_1\overline{y}_1 y_0 \vee x_2 y_1\overline{y}_0 \vee x_3 y_1 y_0$

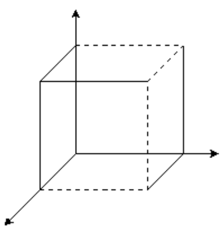


b) Umformung zu a) $g = \overline{y}_0\left(x_0\overline{y}_1 \vee x_2 y_1\right) \vee y_0\left(x_1\overline{y}_1 \vee x_3 y_1\right)$

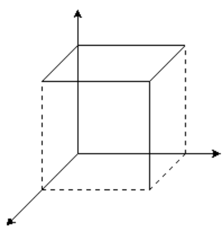


Aufgabe 35

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0



$f_1:$



$f_2:$

$f_1 = \overline{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1\overline{x}_3 = \overline{x}_1 x_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1\overline{x}_3$ oder $= \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_1\overline{x}_3$

$f_2 = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_3$

Aufgabe 36

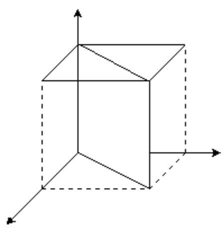
a) Es existieren immer k^{k^2} Funktionen auf einer *k*-elementigen Grundmenge bei *n*=2. Aus *n* Variablen mit *k* möglichen Belegungen pro Variable lassen sich k^n Kombinationen bilden. Aus diesen wiederum lassen sich k^{k^n} Funktionen darstellen. Bei *n*=2 wären es somit k^{k^2} Funktionen.

b)

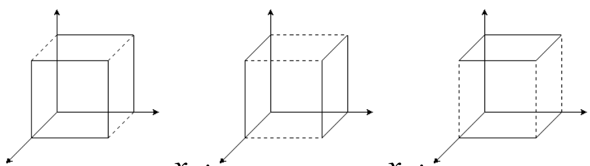
k	$Anzahl\ der\ Funktionen, bei\ n = 2$
2	16
3	19683
4	$\approx 42{,}95 \cdot 10^{8}$
5	$\approx 29{,}80 \cdot 10^{16}$
6	$\approx 10{,}31 \cdot 10^{27}$
7	$\approx 25{,}69 \cdot 10^{40}$
8	$\approx 62{,}77 \cdot 10^{56}$
9	$\approx 19{,}66 \cdot 10^{76}$
10	$10 \cdot 10^{99}$

Aufgabe 37

Symmetrie: Im Booleschen Würfel gibt es eine Ebene, welche den Würfel teilt. Lassen sich alle Punkte, Geraden und Ebenen der Funktion an ihr spiegeln, so ist die Funktion an ihr symmetrisch. Die unten stehende Skizze zeigt diese Ebene für die Symmetrie bezüglich $\{x_1, x_2\}$.



Fiktiv: Eine Funktion hat eine fiktive Variable x_3, wenn zu ihr alle senkrechten Kanten des Booleschen Würfels gehören. Dabei müssen es nicht immer alle Kanten sein. Es kann nur nicht sein, daß ein Eckpunkt der oberen Ebene belegt ist und der zugehörige auf der unteren Ebene nicht. Wäre dies der Fall, so wäre die Funktion nicht fiktiv zu x_3. Bei fiktiv bezüglich x_1 sind alle Kanten zu betrachten, die in die Tiefe führen und bei x_2 alle horizontalen.



x_1: x_2: x_3:

Aufgabe 38

Die Funktion läßt sich wie folgt vereinfacht darstellen:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a\overline{b} \vee \overline{a}b = a \oplus b \quad \text{, bei} \quad a = \left(x_1 x_2 \overline{x_3 x_4} \oplus x_1 \overline{x}_4\right)$$
$$b = \overline{x_1 x_2 x_3}$$

$$= x_1 x_2 \overline{x_3 x_4} \oplus x_1 \overline{x}_4 \oplus \overline{x_1 x_2 x_3} = x_1 x_2 (1 \oplus x_3 x_4) \oplus x_1 (1 \oplus x_4) \oplus 1 \oplus x_1 x_2 x_3$$
$$\underline{\underline{= 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_4 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \quad \Rightarrow ANF}}$$

$$\frac{df}{dx_4} = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$$
$$\frac{df}{dx_4} = x_1 \oplus x_1 x_2 x_3 = x_1 (1 \oplus x_2 x_3) = x_1 \overline{x_2 x_3} = x_1 (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) = \underline{\underline{x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_3 \Rightarrow \min. DNF}}$$