Aufgabe 1.1.

Beweisen Sie, dass das Kommuntativgesetz der Addition für die natürlichen Zahlen gilt !
$\Rightarrow$ Es ist zu zeigen, dass $\forall m,n \in \aleph$: $m+n = n+m$ gilt.

Lösung:

Zuerst zeige ich per vollständiger Induktion, dass $m+1 = 1+m$ gilt:

Induktionsbehauptung:

$m+1 = 1+m$

Induktionsanfang:

$m = 1$:
$1+1 = 1+1$
$\Rightarrow$ wahre Aussage

Induktionsschritt:

$m+1 = 1+m$
$\nu(m+1) = \nu(1+m)$
$\nu(\nu(m)) = 1+\nu(m)$
$\nu(m)+1 = 1+\nu(m)$
$\Rightarrow$ w.z.b.w.

Wiederum per Induktion zeige ich, dass $m+n = n+m$ gilt und berufe mich auf die eben bewiesene Gleichung (m sei stets fixiert):

Induktionsbehauptung:

$m+n = n+m$

Induktionsanfang:

$n = 1$:
$m+1 = 1+m$
$\Rightarrow$ wahre Aussage

Induktionsschritt:

$m+n = n+m$
$\nu(m+n) = \nu(n+m)$ — da $\nu(a)$ eindeutig bestimmt
$m+\nu(n) = n+\nu(m)$ — $\nu(a+b) = a+\nu(b)$
$m+\nu(n) = n+m+1$ — $\nu(a) = a+1$
$m+\nu(n) = n+1+m$ — gemäss Lemma $m+1 = 1+m$
$m+\nu(n) = \nu(n)+m$ — $\nu(a) = a+1$
$\Rightarrow$ w.z.b.w.

Aufgabe 1.2.

Beweisen Sie, dass das Assoziativgesetz der Multiplikation für die natürlichen Zahlen gilt !
$\Rightarrow$ Es ist zu zeigen, dass $\forall m,n,k \in \aleph$: $(m*n)*k = m*(n*k)$ gilt.

Lösung:

Induktionsbehauptung:

$(m*n)*k = m*(n*k)$

Induktionsanfang:

$k = 1$:
$(m*n)*1 = m*(n*1)$
$(m*n) = m*(n)$ — da $P(a,1) = a$
$m*n = m*n$
$\Rightarrow$ wahre Aussage

Induktionsschritt:

$(m*n)*k = m*(n*k)$
$(m*n)*\nu(k) = m*(n*\nu(k))$ — da $\nu(a)$ eindeutig bestimmt
$(m*n)*(k+1) = m*(n*(k+1))$
$m*n*k+m*n = m*(n*k+n)$ — Distributivgesetz

$m*n*k+m*n = m*n*k+m*n$ Distributivgesetz
$\Rightarrow$ w.z.b.w.

Aufgabe 1.3.

Beweisen Sie, dass für $\forall m,n,k \in \aleph$ folgende Aussagen gelten:
a) Es ist $m < n$ genau dann, wenn $m+k < n+k$.
b) Es ist $m < n$ genau dann, wenn $m*k < n*k$.

Lösung:

a) Aus $m < n$ folgt, dass es ein $j \in \aleph$ gibt, für das $m+j = n$.
Somit ist $n+k = (m+j)+k$ und nach dem Kommutativ- und Assoziativitätsgesetz
$n+k = (m+j)+k = (m+k)+j$
Für die Ungleichung ergibt sich
$m+k < (m+k)+j$
Für $i = m+k$ (i fixiert) ist
$i < i+j$
eine immerwahre Aussage.

Aus $m+k < n+k$ folgt, dass es ein $j \in \aleph$ gibt, für das $m+k+j = n+k$ und nach dem Kommutativgesetz $m+k+j = m+j+k$ $(= n+k)$. K-faches Bilden des Vorgängers auf beiden Seiten führt zu $m+j = n$, also $m < n$.
$\Rightarrow$ w.z.b.w.

b) Aus $m < n$ folgt, dass es ein $j \in \aleph$ gibt, für das $m+j = n$.
Somit ist $n*k = (m+j)*k$ und nach dem Distributivgesetz $n*k = (m+j)*k = m*k+j*k$
Für die Ungleichung ergibt sich
$m*k < m*k+j*k$
Für $i = m*k$ (i fixiert) ist
$i < i+j*k$
eine immerwahre Aussage.

Aus $m*k < n*k$ folgt, dass es ein $j \in \aleph$ gibt, für das $m*k+j = n*k$
Nach dem Distributivgesetz ist $(m+j/k)*k = n*k$, also $n = m+j/k$, woraus $m < n$ folgt.
$\Rightarrow$ w.z.b.w.