Aufgabe 11.1.

Zeigen Sie mit Hilfe der ε-δ-Sprache, dass die Funktion $\sqrt{x}, x \geq 0$ stetig bei x_0=5 ist.

Lösung:

Es muss gelten:
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \left| x - x_0 \right| < \delta \ dann \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$$
eingesetzt:
$$\left| \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \right| = \frac{\left| \sqrt{x} - \sqrt{x_0} \right| \left| \sqrt{x} + \sqrt{x_0} \right|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$
$$= \frac{\left| x - x_0 \right|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$
$$< \frac{\left| x - x_0 \right|}{\sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left| x - 5 \right| < \varepsilon$$
sobald
$$\delta = \sqrt{5}\varepsilon > \left| x - x_0 \right| = \left| x - \sqrt{5} \right|$$
Für beliebig große/kleine ε lässt sich demzufolge immer ein δ angeben.

Aufgabe 11.2.

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

Aufgabe 11.2.1.

$$f(x) = \left| x \right|, dom(f) = R$$

Lösung:

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| = \left| \left| x \right| - \left| x_0 \right| \right|$$
Diese Funktion ist in R stetig.

Aufgabe 11.2.2.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}, a \in R$$

Lösung:

Für $x \neq 2$:
$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$$

Nur für a=2+2=4 ist die Funktion an der Stelle 2 stetig.

<u>Aufgabe 11.2.3.</u>

$$f(x)=\begin{cases}\left|\frac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Lösung:

Die Funktion $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ ist in R\{0} stetig und ihr Grenzwert an der Stelle 0 ist:

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=\left|\frac{\cos 0}{1}\right|=1$$

Aufgrund dieser Tatsache ist $f(x)$ stetig.

<u>Aufgabe 11.2.4.</u>

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

Lösung:

$\lim\limits_{x\to 0-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0-}-\frac{\sin x}{x}=-1$ aber

$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x}=+1.$

Da sich an der Stelle 0 der links- und der rechtsseitige Grenzwert unterscheiden, ist $f(x)$ dort nicht stetig.

<u>Aufgabe 11.2.5.</u>

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases},a\in R$$

Lösung:

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ existiert nicht, da man für jede Zahl $c\in[-1,+1]$ eine Nullfolge bilden kann mit der Eigenschaft $\sin\frac{1}{y_n}\to c$.

Begründung: Setzt man

$$\alpha=\arcsin c$$

$$y_n=\frac{1}{\alpha+2\pi n}$$ für n=1,2,...

so ist

$\sin\frac{1}{y_n} = \sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha = c$.

Wenn sich an der Stelle 0 kein Grenzwert ermitteln lässt, so ist $f(x)$ dort auch nicht stetig.

Aufgabe 11.3.

Finden Sie die Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

Aufgabe 11.3.1.

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}, x \in R$$

Lösung:

An der Stelle-1 ist f nicht definiert und der Grenzwert ∞, sie ist dort nicht stetig.

Aufgabe 11.3.2.

$$f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}, x \in R$$

Lösung:

Zwar ist f bei –1 nicht definiert, der Grenzwert beträgt jedoch nach de l'Hospital:

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 11.3.3.

$$f(x) = \arctan\frac{1}{x}, x \in R$$

Lösung:

An der Stelle 0 ist f nicht definiert. Der linksseitige Grenzwert ist

$\lim_{x\to 0-}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to -\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$, der rechtsseitige $\lim_{x\to 0+}\arctan\frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty}\arctan x = +\frac{\pi}{2}$.

Dieser Unterschied zeigt, dass f dort nicht stetig sein kann.

Aufgabe 11.3.4.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+1}, x \in R$$

Lösung:

Der Nenner der Funktion ist 0 an den drei Stellen –1,879, +0,347 und +1,532 (auf 3 Nachkommastellen gerundet), deshalb ist f dort nicht definiert. Der linksseitige Grenzwert ist jeweils -∞, der rechtsseitige +∞, d.h. dort ist f nicht stetig.

Aufgabe 11.4.

Es sei $f, dom(f) = R$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass auch $F(x) := |f(x)|, dom(F) = R$ eine stetige Funktion ist.

Lösung:

Die Betragsfunktion ist stetig in R (siehe 11.2.1.). Für $x_n \to a$ gilt weiter, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ (da stetig), woraus folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} F(f(x_n)) = F(f(a)) = |f(a)|$. Somit ist auch F stetig.

Aufgabe 11.5.

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen gleichmäßig stetig sind:

Generelle Lösungsidee:

Es muss $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ gelten. Ich fixiere dabei jeweils $a = x_2$.

Aufgabe 11.5.1.

$$f(x) = \frac{x}{4 - x^2}, dom(f) = [-1,1]$$

Lösung:

$$|f(x_1) - f(a)| = \left| \frac{x_1}{4 - x_1^2} - \frac{a}{4 - a^2} \right|$$

$$\left| 0 - \frac{a}{4 - a^2} \right| \le \left| \frac{x_1}{4 - x_1^2} - \frac{a}{4 - a^2} \right| \le \left| -\frac{1}{3} - \frac{a}{4 - a^2} \right|$$

Aufgabe 11.5.2.

$$f(x) = \ln x, dom(f) = (0,1)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(a)| &= |\ln x_1 - \ln a| \\ &= \left| \ln \frac{x_1}{a} \right| \end{aligned}$$

Aufgabe 11.5.3.

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, dom(f) = (0, \pi)$$

Lösung:

$$\left| f(x_1) - f(a) \right| = \left| \frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin a}{a} \right|$$

$$=$$

Aufgabe 11.5.4.

$$f(x) = e^x \cos\frac{1}{x}, dom(f) = (0,1)$$

Lösung:

$$\left| f(x_1) - f(a) \right| = \left| e^{x_1} \cos\frac{1}{x_1} - e^a \cos\frac{1}{a} \right|$$

$$=$$

Aufgabe 11.5.5.

$$f(x) = \sqrt{x}, dom(f) = \{x \in R : x \geq 0\}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \left| f(x_1) - f(a) \right| &= \left| \sqrt{x_1} - \sqrt{a} \right| \\ &= \frac{\left| \sqrt{x_1} - \sqrt{a} \right| \left| \sqrt{x_1} + \sqrt{a} \right|}{\left| \sqrt{x_1} + \sqrt{a} \right|} \\ &= \frac{\left| x_1 - a \right|}{\left| \sqrt{x_1} + \sqrt{a} \right|} \end{aligned}$$

$$\frac{\left| x_1 - a \right|}{\left| \sqrt{x_1} + \sqrt{a} \right|} < \varepsilon$$

$$\left| x_1 - a \right| < \varepsilon \left| \sqrt{x_1} + \sqrt{a} \right|$$