<u>Aufgabe 13.1.</u>

Finden Sie eine Differentialgleichung 1.Ordnung, die die Funktion $f(x) = xe^{-x^2}$, $x > 0$ als eine Lösung hat.

Lösung:

Es muss $f' = G(x, f(x)) = G(x, xe^{-x^2})$ sein:

$$\begin{aligned} f(x)' &= \left(xe^{-x^2}\right) \\ &= e^{-x^2} + x \cdot (-2x)e^{-x^2} \\ &= e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right) \\ &= xe^{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2x\right) \\ &= f(x) \cdot \left(\frac{1}{x} - 2x\right) \end{aligned}$$

f(*x*) ist somit eine Lösung der Differentialgleichung $f(x)' = f(x) \cdot \left(\frac{1}{x} - 2x\right)$.

<u>Aufgabe 13.2.</u>

Finden Sie die Riemann-Zwischensumme ZS(Z_n,*f*) für jedes *n*=1,2,..., $f(x) = 1 + x$ und $[a,b] = [-1,4]$, wenn Sie eine äquidistante Zerlegung $\left\{I_k^{(n)}\right\}_{k=1}^{n}$, $I_k^{(n)} = \left[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}\right)$ von [-1,4] annehmen und den Zwischenwert $\xi_k^{(n)} = \frac{x_{k-1}^{(n)} + x_k^{(n)}}{2}$ setzen.

Lösung:

$$x_k^{(n)} = a + \frac{(b-a)k}{n} = \frac{5k}{n} - 1$$

$$x_{k-1}^{(n)} = \frac{5(k-1)}{n} - 1$$

$$\xi_k^{(n)} = \frac{x_{k-1}^{(n)} + x_k^{(n)}}{2} \in I_k^{(n)}$$

$$f(x) = 1 + x$$

$$f(\xi_k^{(n)}) = 1 + \xi_k^{(n)}$$

$$ZS(z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k^{(n)}) \left| I_k^{(n)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\xi_k^{(n)}\right) \left| \left(\frac{5(k-1)}{n}-1\right) - \left(\frac{5k}{n}-1\right) \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}}{2}\right) \left| \frac{5(k-1)}{n} - \frac{5k}{n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}}{2}\right) \left| k-1-k \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2+x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(2+x_{k-1}^{(n)}+x_k^{(n)}\right)$$

$$= 5 + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{5(k-1)}{n}-1\right) + \left(\frac{5k}{n}-1\right) \right)$$

$$= 5 + \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5}{n}\left(k-1+k\right) - 2 \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{n}\left(2k-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{25}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(2k-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{25(n+1)}{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{25n}{2n} + \frac{25}{2n} \right)$$

$$= \frac{25}{2}$$

Aufgabe 13.3.

Finden Sie die Riemann-Untersumme US(Z_n,f) und die Riemann-Obersumme OS(Z_n,f) für jedes n=1,2,... und die folgenden Funktionen, wenn Sie eine äquidistante Zerlegung annehmen (h=1/k):

Aufgabe 13.3.1.

$$f(x)=x^2,\ [a,b]=[-2,3]$$

Lösung:

Ich verwende wieder eine äquidistante Zerlegung, wobei k von 1 bis 5n läuft.

$$x_k^{(n)}=a+\frac{(b-a)k}{n}=\frac{k}{n}-2$$

$$x_{k-1}^{(n)}=\frac{k-1}{n}-2$$

Die Fläche unter Graphen von –2 bis 0 ist ebenso groß wie die von 0 bis +2. Dementsprechend zerlege ich die Funktion in 3 Teilflächen (-2...0, 0...+2 und +2...+3).

$$\begin{aligned}
US(z_n,f)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{5n}f(m_k^{(n)})\left|I_k^{(n)}\right|\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\left(x_k^{(n)}\right)^2\frac{1}{n}+\sum_{k=2n+1}^{4n}\left(x_{k-1}^{(n)}\right)^2\frac{1}{n}+\sum_{k=4n+1}^{5n}\left(x_{k-1}^{(n)}\right)^2\frac{1}{n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}-2\right)^2+\sum_{k=2n+1}^{4n}\left(\frac{k-1}{n}-2\right)^2+\sum_{k=4n+1}^{5n}\left(\frac{k-1}{n}-2\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Ändert man den Laufindex, so dass er stets bei Null beginnt, und sich der zweite Term auf den ersten zurückführen lässt, entsteht:

$$\begin{aligned}
US(z_n,f)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{2n-k}{n}-2\right)^2+\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{k-1+2n+1}{n}-2\right)^2+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k-1+4n+1}{n}-2\right)^2\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{2n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^2+\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}+2\right)^2\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(2\sum_{k=0}^{2n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}+2\right)^2\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=0}^{2n-1}k^2+\sum_{k=0}^{n-1}(k+2n)^2\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=0}^{2n-1}k^2+\sum_{k=0}^{n-1}k^2+\sum_{k=0}^{n-1}4nk^2+\sum_{k=0}^{n-1}4n^2\right)
\end{aligned}$$

Die Summenformeln $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ helfen weiter:

$$\begin{aligned}
US(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(2\sum_{k=0}^{2n-1} k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + \sum_{k=0}^{n-1} 4nk + \sum_{k=0}^{n-1} 4n^2 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(2\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 4n\frac{(n-1)n}{2} + 4n^3 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{4n(2n-1)(4n-1) + (n-1)n(2n-1) + 12n^2(n-1) + 24n^3}{6} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(32n^3 - 24n^2 + 4n\right) + \left(2n^3 - 3n^2 + n\right) + \left(12n^3 - 12n^2\right) + 24n^3}{6n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{70n^3 - 36n^2 - 7n}{6n^3} \\
&= \frac{35}{3}
\end{aligned}$$

Ich verzichte auf die genaue Rechnung der Obersumme, das Ergebnis ist ebenfalls $\frac{35}{3}$, der Rechenweg ist ähnlich.

Aufgabe 13.3.2.

$f(x) = \sqrt{x}, \; [a,b] = [0,1]$

Lösung:

Die Funktion ist monoton steigend, demzufolge ist $m_k^{(n)} = f(x_{k-1}^{(n)})$ und $M_k^{(n)} = f(x_k^{(n)})$.

$$\begin{aligned}
US(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k-1}{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k-1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}
\end{aligned}$$

An diesem Punkt muss man aufhören, da es keine Summenformel für $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$ gibt.

Aufgabe 13.3.3.

$f(x) = 2^x, [a,b] = [0,10]$

Lösung:

Es bietet sich die äquidistante Zerlegung $x_k^{(n)} = 10\frac{k}{n}$ an.

$$
\begin{aligned}
US(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{10k}{n}} \left| \frac{10}{n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(2^{10}\right)^{\frac{k}{n}}
\end{aligned}
$$

Die entsprechende Summenformel lautet $\sum_{k=1}^{n} a^{b\frac{k}{n}} = \frac{a^b - 1}{2^{\frac{b}{n}} - 1}$.

Daraus ergibt sich:

$$US(z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2^{\frac{10}{n}} - 1}$$

Weiter kann ich mit elementaren mathematischen Mitteln die Gleichung nicht auflösen. Das per Integralrechnung bestimmte Ergebnis ist $\int_0^{10} 2^x \, dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_0^{10} = \frac{1023}{\ln 2} \approx 1475{,}9$

<u>Aufgabe 13.4.</u>

Finden Sie die Riemann-Untersumme US(Z_n,f) für jedes n=1,2,... $f(x)=x^4$, $[a,b]=[1,2]$ wenn Sie eine geometrische Zerlegung $\{I_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, $I_k^{(n)}=\left[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}\right)$ von [1,2] annehmen, d.h. $\dfrac{x_k^{(n)}}{x_{k-1}^{(n)}}=q_n>1$ für jedes k=1,2,...,n.

Lösung:

Die geometrische Zerlegung des Intervalls lässt sich umschreiben als $x_k^{(n)}=q_n x_{k-1}^{(n)}=q_n^k x_0^{(n)}$.
Da $x_0^{(n)}=1$ ist, gilt sogar $x_k^{(n)}=q_n^k$. Aus der zweiten Grenze $x_n^{(n)}=2$ folgt $q_n^n=\sqrt{2}$, d.h. $q_n=\sqrt[n]{2}$ bzw. $x_k^{(n)}=2^{\frac{k}{n}}$.

$$
\begin{aligned}
US(z_n,f) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} m_k^{(n)}\left|I_k^{(n)}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(x_{k-1}^{(n)}\right)^4\left(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{k-1}{n}}\right)^4\left(2^{\frac{k}{n}}-2^{\frac{k-1}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{\frac{k}{n}}\right)^4\left(2^{\frac{k+1}{n}}-2^{\frac{k}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{\frac{k}{n}}\right)^4\cdot 2^{\frac{k}{n}}\cdot\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right) \\
&= \left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2^{\frac{k}{n}}\right)^5 \\
&= \left(\sqrt[n]{2}-1\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}2^{\frac{5k}{n}}
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{n}q^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}q^k=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{q^n-1}{q-1}$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
US(z_n,f) &= \left(\sqrt[n]{2}-1\right)\cdot\frac{2^{\frac{5}{n}\cdot n}-1}{2^{\frac{5}{n}}-1} \\
&= \frac{31\cdot\left(\sqrt[n]{2}-1\right)}{2^{\frac{5}{n}}-1} \\
&= \frac{31}{2^{\frac{4}{n}}+2^{\frac{3}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{0}{n}}}
\end{aligned}
$$

Aus $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{4}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{3}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{2}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{0}{n}} = 1$ folgt $US(z_n, f) = \frac{31}{5}$.

Aufgabe 13.5.

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe der Riemann-Integralsumme (Riemann-Zwischensumme, Riemann-Untersumme, Riemann-Obersumme).
Wählen Sie eine günstige Zerlegung des Integrationsintervalls !

Aufgabe 13.5.1.

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Lösung:

Die Funktion ist in dem gegebenen Intervall monoton steigend, es gilt für $\frac{k-1}{n} \leq \xi_k^{(n)} \leq \frac{k}{n}$ stets $m_k^{(n)} \leq \xi_k^{(n)} \leq M_k^{(n)}$. Aus Gründen der möglichst einfachen Berechnung wähle ich aufgrund dieser Monotonie die Obersumme. Zusätzlich wird die Beziehung $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ausgenutzt. Den Integrationsintervall zerlege ich äquidistant:

$$\begin{aligned}
OS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} M_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.5.2.

$$\int_0^1 a^x dx,\ a > 0$$

Lösung:

Die Funktion ist in dem gegebenen Intervall monoton steigend, es gilt für $\frac{k-1}{n} \le \xi_k^{(n)} \le \frac{k}{n}$ stets $m_k^{(n)} \le \xi_k^{(n)} \le M_k^{(n)}$. Diesmal bietet sich die Zwischensumme an.
Den Integrationsintervall zerlege ich erneut äquidistant.

$$\begin{aligned} ZS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(n)} \left| I_k^{(n)} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Auch jetzt entstand eine geometrische Reihe. Wiederholt setze ich deshalb die Formel $\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n - 1}{q-1}$ ein:

$$\begin{aligned} ZS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{a^{\frac{n}{n}} - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{a - 1}{a^{\frac{1}{n}} - 1} \end{aligned}$$

Jetzt erkennt man, dass der Zähler sich als natürlichen Logarithmus darstellen lässt, da die Gleichung $\ln x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ stets gilt:

$$\begin{aligned} ZS(z_n, f) &= (a-1) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(a^{\frac{1}{n}} - 1 \right)} \\ &= (a-1) \cdot \frac{1}{\ln a} \\ &= \frac{a-1}{\ln a} \end{aligned}$$

Aufgabe 13.5.3.

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx,\ 0<a<b$$

Hinweis: Setzen Sie den Zwischenwert $\xi_k^{(n)} = \sqrt{x_k^{(n)} x_{k-1}^{(n)}}$, k=1,2,...,n.

Lösung:

Es sei $\delta = b - a$. Dann ist bei äquidistanter Zerlegung $x_k^{(n)} = a + \delta \cdot \frac{k}{n}$, wobei k von 1 bis n läuft und $I_k^{(n)} = \frac{\delta}{n}$. Die Betrachtung der Zwischensumme (siehe Hinweis, es ist $\frac{1}{\left(\xi_k^{(n)}\right)^2} = \frac{1}{x_k^{(n)} x_{k-1}^{(n)}}$) liefert:

$$\begin{aligned}
ZS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(a+\delta\cdot\frac{k}{n}\right)\left(a+\delta\cdot\frac{k-1}{n}\right)} \cdot \frac{\delta}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{n}(an+\delta k)\frac{1}{n}(an+\delta\cdot(k-1))} \cdot \frac{\delta}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{an+\delta k-(an+\delta\cdot(k-1))}{(an+\delta\cdot(k-1))\cdot(an+\delta k)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{an+\delta(k-1)} - \frac{1}{an+\delta k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{an+\delta k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{an+\delta k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\left(\frac{1}{an} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{an+\delta k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{an+\delta k} + \frac{1}{an+\delta n}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1}{an} - \frac{1}{an+\delta n}\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\delta} \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 13.5.4.</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

Lösung: (Rechenweg komplett der Referenzlösung entnommen)

Die erneut äquidistante Zerlegung bedeutet, dass k von 0 bis ½π läuft. Somit ergibt sich:
$x_k^{(n)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n}$ und $I_k^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$. Es entsteht:

$$ZS(z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

Wenn man die Eulersche Formel im komplexen Zahlenkörper beachtet, kann man die Gleichung $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ umformen und erhält $\sin x = \Im m\left(e^{ix}\right)$. Für die Zwischensumme bedeutet das:

$$ZS(z_n, f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \Im m\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i \cdot \frac{k\pi}{2n}}\right)$$

Jetzt ist eine geometrische Reihe entstanden, die sich auflöst nach:

$$\begin{aligned} ZS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \cdot \Im m\left(\frac{e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} - 1}{e^{i \cdot \frac{\pi}{2n}} - 1}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\pi}{4n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi(n-1)}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 13.5.5.

$$\int_0^x \cos t \, dt,\ x > 0$$

Lösung: (Rechenweg komplett der Referenzlösung entnommen)

Die Vorgehensweise ist die gleiche wie in der Aufgabe zuvor. Die dazugehörige Gleichung für die komplexe Darstellung von *cos* lautet $\cos x = \Re e\left(e^{ix}\right)$:

$$\begin{aligned}
ZS(z_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \cos\frac{kx}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \cdot \Re e\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\cdot\frac{kx}{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \cdot \Re e\left(\frac{e^{ix}-1}{e^{\frac{ix}{n}}-1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x(n-1)}{2n}}{\sin\frac{x}{2n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2} \\
&= \sin x
\end{aligned}$$

Aufgabe 13.5.6.

Zeigen Sie, dass die Riemannsche Funktion

$$r(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1]/Q \\ \frac{1}{p} & x = \frac{p}{q} \in [0,1] \cap Q \end{cases}$$

- wobei *p* und *q* teilerfremd sind - integrierbar ist.

Lösung: (komplett der Referenzlösung entnommen)

Es sei $\varepsilon > 0$ und $M_\varepsilon := \{x \in [0,1] : r(x) \geq \varepsilon\}$. Da $x \in [0,1]$, gilt für $x = \frac{p}{q}$, dass $0 < p \leq q$. Aus $x = \frac{p}{q} \in M_\varepsilon$ folgt $q \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Damit gilt für $x = \frac{p}{q} \in M_\varepsilon$ die Relation $0 \leq p \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$. Somit besteht die Menge M_ε aus endlich vielen Punkten. Wir setzen

$$r_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(x) & x \in [0,1]/M_\varepsilon \\ 0 & x \in [0,1] \cap M_\varepsilon \end{cases},$$

Fernen setzen wir $d_\varepsilon(x) := r(x) - r_\varepsilon(x)$. Die Funktion ist offensichtlich nur für $x \in M_\varepsilon$ verschieden von Null, d.h. die Funktion d_ε ist nur in endlich vielen Punkten verschieden von Null.

Es gilt

$$0=\underline{\int_0^1} r \le \overline{\int_0^1} r \le \overline{\int_0^1} r_\varepsilon + \overline{\int_0^1} d_\varepsilon$$

Da d_ε nur in endlich vielen Punkten verschieden von Null ist, findet man $\overline{\int_0^1} d\varepsilon = 0$. Weiterhin gilt

$r_\varepsilon(x) < \varepsilon,\ x \in [0,1]$, was $\overline{\int_0^1} r_\varepsilon \le \varepsilon$ impliziert. Somit erhalten wir

$$0=\underline{\int_0^1} r \le \overline{\int_0^1} r \le \overline{\int_0^1} r_\varepsilon + \overline{\int_0^1} d_\varepsilon \le \varepsilon .$$

Da ε beliebig klein gewählt werden kann, folgt $0=\underline{\int_0^1} r = \overline{\int_0^1} r$. Folglich ist r integrierbar und $\int_0^1 r = 0$.

<u>Aufgabe 13.5.7.</u>

Zeigen Sie, dass für die Funktion

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap Q \\ -1 & x \in [0,1] / Q \end{cases}$$

das Integral $\int_0^1 |f|$ existiert, jedoch das Integral $\int_0^1 f$ nicht existiert.

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap Q \\ -1 & x \in [0,1] / Q \end{cases} \right| \\ &= \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap Q \\ 1 & x \in [0,1] / Q \end{cases} \\ &= 1 \quad x \in [0,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)|\, dx &= x\Big|_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Das Integral von $|f|$ existiert und ist 1.

Anders sieht es bei f aus. Hier ist $-1=\underline{\int_0^1} f < \overline{\int_0^1} f = 1$. Da $\underline{\int_0^1} f \ne \overline{\int_0^1} f$ existiert $\int_0^1 f$ nicht.