Aufgabe 14.1.

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, indem Sie die Tabelle der Grundintegrale verwenden.

Aufgabe 14.1.1.

$$\int \left(3-x^2\right)^3 dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \left(3-x^2\right)^3 dx &= \int \left(27-27x^2+9x^4-x^6\right)dx \\ &= 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.1.2.

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx &= \int \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 dx \\ &= \int \left(x^{-2}-2x^{-1}+1\right)dx \\ &= -\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.1.3.

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx &= \int \frac{x^2-1+4}{x^2-1}dx \\ &= \int dx+\int \frac{4}{x^2-1}dx \\ &= x+4\int \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx \\ &= x+4\int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= x+2\ln|x-1|-2\ln|x+1|+c \\ &= x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.2.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben, indem Sie benutzen, dass $\frac{1}{a}F(ax+b)+C,\ a\neq 0$, eine Stammfunktion von $f(ax+b)$ ist, wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Aufgabe 14.2.1.

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\ dx$$

Lösung:

$$t = 1-3x$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{1-3x}\ dx &= \int \sqrt[3]{t}\ \frac{dt}{-3} \\
&= -\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}} dt \\
&= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot t^{\frac{4}{3}} + c \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{t^4} + c \\
&= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.2.2.

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\ dx$$

Lösung:

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}}x = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$dx = \frac{2}{\sqrt{6}}dz$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+3x^2}\ dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2}\ dx \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\int\frac{dz}{1+z^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan z + c \\
&= \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}x + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.2.3.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx$$

Lösung:

$$z = \sqrt{\frac{3}{2}}x = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

$$dx = \frac{2}{\sqrt{6}}dz$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{3}{2}x^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin z + c$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin \frac{\sqrt{6}}{2}x + c$$

Aufgabe 14.2.4.

$$\int \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)dx$$

Lösung:

$$\int \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)dx = \int e^{-x}dx + \int e^{-2x}dx$$

$$= -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

Aufgabe 14.2.5.

$$\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx$$

Lösung:

Hilfreich ist das Additionstheorem $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$$t = \frac{x}{2}$$
$$dx = 2du$$
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx &= \int \frac{2dt}{1-\cos 2t} \\
&= \int \frac{2dt}{1-(1-2\sin^2 t)} \\
&= \int \frac{dt}{\sin^2 t} \\
&= -\cot t + c \\
&= -\cot \frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.3.

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben, indem Sie geeignet substituieren.

Aufgabe 14.3.1.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Lösung:

$$t = 1 - x^2$$
$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{-2x} \\
&= \int -\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + c \\
&= -\sqrt{t} + c \\
&= -\sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 14.3.2.</u>

$$\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\ dx$$

Lösung:

$$t = 1 + x^3$$

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\ dx &= \int x^2 \sqrt[3]{t}\ \frac{dt}{3x^2} \\
&= \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}} dt \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + c \\
&= \frac{1}{4}\sqrt[3]{t^4} + c \\
&= \frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^4} + c
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 14.3.3.</u>

$$\int x e^{-x^2}\ dx$$

Lösung:

$$t = -x^2$$

$$\begin{aligned}
\int x e^{-x^2}\ dx &= \int x e^t\ \frac{dt}{-2x} \\
&= -\frac{1}{2}\int e^t dt \\
&= -\frac{1}{2} e^t + c \\
&= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.3.4.

$$\int \tan x \, dx$$

Lösung:

$$t = \cos x$$

$$\begin{aligned}
\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\
&= \int \sin x \, \frac{dt}{-\sin x} \\
&= -\int \frac{1}{t} dt \\
&= -\ln|t| + c \\
&= -\ln|\cos x| + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.3.5.

$$\int \frac{1}{\sin x} \, dx$$

Lösung:

Wichtig zur Ermittlung dieses Integrals ist die Kenntnis der Beziehungen $\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$,

$(\sin x)' \, dx = \cos x$ und $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$:

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2\tan\frac{x}{2}} dx \\
&= \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} dx \\
&= \int \frac{dt}{t} \\
&= \ln|t| + c \\
&= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c
\end{aligned}$$

Es gibt noch einen anderen Weg, dieses Integral zu bestimmen, wenn man die Additionstheoreme beachtet:

$$\sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{x}{2} \\
dx &= 2dt \\
\int \frac{dx}{\sin x} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \int \frac{dt}{\sin t \cos t} \\
&= \int \frac{dt}{\frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t} \\
&= \int \frac{dt}{\tan t \cos^2 t} \\
&= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}dt}{\tan t} \\
&= \int \frac{g'(t)}{g(t)}dt \quad [g(t) = \tan t] \\
&= \ln|\tan t| + c \\
&= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.4.

Integrieren Sie, indem Sie das Integral geeignet zerlegen.

Aufgabe 14.4.1.

$$\int \cos^3 x \, dx$$

Lösung:

Ich verwende die Beziehung $\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$, die aus der Darstellung der komplexen Zahlen stammt:

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right)^3 dx \\
&= \int \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\int \left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) dx \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3i}e^{3ix} + \frac{3}{i}e^{ix} - \frac{3}{i}e^{-ix} - \frac{1}{3i}e^{-3ix}\right) + c \\
&= \frac{1}{24i}\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + \frac{3}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + c \\
&= \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c
\end{aligned}$$

Alternativ kann integrieren, indem man das Additionstheorem $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ benutzt:

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \, dx &= \int \cos x \cdot \cos^2 x \, dx \\
&= \int \cos x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) dx \\
&= \int \cos x \, dx - \int \cos x \sin^2 x \, dx \\
&= \sin x - \int \cos x \sin^2 x \, dx
\end{aligned}$$

$$t = \sin x$$

$$dx = \frac{1}{\cos x} dt$$

$$\begin{aligned}
\int \cos x \sin^2 x \, dx &= \int t^2 \, dt \\
&= \frac{1}{3}t^3 + c \\
&= \frac{1}{3}\sin^3 x + c
\end{aligned}$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$$

Aufgabe 14.4.2.

$$\int \frac{1}{(x-1)(x+3)}\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-1)(x+3)}\,dx &= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\ln|x-1|-\ln|x+3|\right)+c \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.4.3.

$$\int \frac{x}{x^4+3x^2+2}\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^4+3x^2+2}\,dx &= \int x\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2+x^2}\right)dx \\
&= \int\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{2+x^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\,dx-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{2+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|-\frac{1}{2}\ln\left|2+x^2\right|+c \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x^2}{2+x^2}\right|+c
\end{aligned}$$

Aufgabe 14.5.

Integrieren Sie partiell !

Aufgabe 14.5.1.

$$\int \ln x \, dx$$

Lösung:

$$u = \ln x$$
$$u' = \frac{1}{x}$$
$$v' = 1$$
$$v = x$$

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= \int uv' \, dx \\ &= uv - \int u'v \, dx \\ &= x \ln x - \int \frac{x}{x} \, dx \\ &= x \ln x - x + c\end{aligned}$$

Aufgabe 14.5.2.

$$\int x^n \ln x \, dx$$

Lösung:

$$u = \ln x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = x^n$$

$$v = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\int x^n \ln x \, dx = \int u v' \, dx$$

$$= uv - \int u' v \, dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1} dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c$$

Aufgabe 14.5.3.

$$\int \cos(\ln x)\,dx$$

Lösung:

$$u' = 1$$
$$u = x$$
$$v = \cos(\ln x)$$
$$v' = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\cdot\frac{x}{x}\,dx$$
$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$$

$$u' = 1$$
$$u = x$$
$$v = \sin(\ln x)$$
$$v' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\cdot\frac{x}{x}\,dx$$
$$= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$
$$2\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$
$$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right)$$

Aufgabe 14.5.4.

$$\int x\cos x\,dx$$

Lösung:

$$u' = \cos x$$
$$u = \sin x$$
$$v = x$$
$$v' = 1$$

$$\int x\cos x\,dx = uv - \int uv'\,dx$$
$$= x\sin x - \int \sin x\,dx$$
$$= x\sin x + \cos x + c$$

Aufgabe 14.5.5.

$$\int \arcsin x \, dx$$

Lösung:

$$u' = 1$$
$$u = x$$
$$v = \arcsin x$$
$$v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$t = 1 - x^2$$
$$dx = -\frac{1}{2x} dx$$

$$\int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$
$$= \sqrt{t} + c$$
$$= \sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Aufgabe 14.5.6.

$$\int x^2 e^{-2x}\ dx$$

Lösung:

$$u = x^2$$
$$u' = 2x$$
$$v' = e^{-2x}$$
$$v = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\int x^2 e^{-2x}\ dx = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} + \int x e^{-2x} dx$$

$$u = x$$
$$u' = 1$$
$$v' = e^{-2x}$$
$$v = -\frac{e^{-2x}}{2}$$

$$\int x e^{-2x} dx = -\frac{x e^{-2x}}{2} + \int \frac{e^{-2x}}{2} dx$$
$$= -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c$$

$$\int x^2 e^{-2x}\ dx = -\frac{x^2 e^{-2x}}{2} - \frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c$$
$$= -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + c$$

Aufgabe 14.5.7.

$\int e^{ax} \cos bx \, dx$

Lösung:

$$u' = e^{ax}$$

$$u = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$v = \cos bx$$

$$v' = -\frac{1}{b} \sin bx$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \int \frac{1}{a} e^{ax} \frac{1}{b} \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{ab} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$u' = e^{ax}$$

$$u = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$v = \sin bx$$

$$v' = \frac{1}{b} \cos bx$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{1}{ab} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{ab} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{1}{ab} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{a^2 b} e^{ax} \sin bx - \frac{1}{a^2 b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

$$\left(1 + \frac{1}{a^2 b^2} \right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{a^2 b} e^{ax} \sin bx + c$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2 + 1} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{a^2 b} e^{ax} \sin bx \right) + c$$

$$= e^{ax} \frac{ab^2}{a^2 b^2 + 1} \left(\cos bx + \frac{1}{ab} \sin bx \right) + c$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \left(a \cos bx - b \sin bx \right) + c$$