Aufgabe 15.1.

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, indem Sie die Tabelle der „Grundintegrale“ verwenden.

Aufgabe 15.1.1.

$$\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[4]{x}}\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[4]{x}}\,dx &= \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^{\frac{5}{4}}}\,dx \\
&= \int\left(x^{-\frac{5}{4}}-3x^{-\frac{1}{4}}+3x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{7}{4}}\right)dx \\
&= -\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{4}}-4x^{\frac{3}{4}}+\frac{12}{7}x^{\frac{7}{4}}-\frac{4}{11}x^{\frac{11}{4}}+c \\
&= -\frac{1}{4\sqrt[4]{x}}-4\sqrt[4]{x^3}+\frac{12}{7}x\sqrt[4]{x^3}-\frac{4}{11}x^2\sqrt[4]{x^3}+c
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.2.

$$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx &= \int\left(1-x^{-2}\right)x^{\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)dx \\
&= \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+c \\
&= \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+c
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 15.1.3.</u>

$$\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}\,dx &= \int \frac{2x-2\sqrt{2x}\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9x^2}}{x}\,dx \\
&= \int \frac{2x-2x^{\frac{2}{3}}\sqrt{2}\sqrt[3]{3}+x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{9}}{x}\,dx \\
&= \int 2-2\sqrt{2}\sqrt[3]{3}x^{-\frac{1}{3}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}\,dx
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 15.1.4.</u>

$$\int x^2(5-x)^4\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int x^2(5-x)^4\,dx &= \int x^2\left(625-500x+150x^2-20x^3+x^4\right)dx \\
&= \int \left(625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6\right)dx \\
&= \frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+c
\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 15.1.5.</u>

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx &= \int \left(1-3x+2x^2\right)(1-3x)\,dx \\
&= \int \left(1-6x+11x^2-6x^3\right)dx \\
&= x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+c
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.6.

$$\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$$

Lösung:

$$\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx=\int\left(ax^{-1}+a^2x^{-2}+a^3x^{-3}\right)dx$$

$$=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+c$$

Aufgabe 15.1.7.

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$$

Lösung:

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c$$

Aufgabe 15.1.8.

$$\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$$

Lösung:

$$\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{5}{12}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)dx$$

$$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}-\frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+c$$

$$=\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x}-\frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+c$$

Aufgabe 15.2.

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben, indem Sie geeignet substituieren.

Aufgabe 15.2.1.

$$\int \frac{x}{3-2x^2}\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} t &= 3-2x^2 \\ dx &= -\frac{1}{4x}\,dt \\ \int \frac{x}{3-2x^2}\,dx &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{t} dt \\ &= -\frac{\ln\left|3-2x^2\right|}{4} + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.2.2.

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} t &= \ln x \\ dx &= x\,dt \\ \int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx &= \int t^2\,dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + c \\ &= \frac{1}{3}\ln^3 x + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.2.3.

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}\, dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
t &= \ln x \\
dx &= x\, dt \\
\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}\, dx &= \int \frac{dt}{t \ln t} \\
s &= \ln t \\
dt &= t\, ds \\
\int \frac{dt}{t \ln t} &= \int \frac{1}{s}\, ds \\
&= \ln s + c \\
&= \ln \ln t + c \\
&= \ln \ln \ln x + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.2.4.

$$\int \sin^5 x \cos x\, dx$$

Lösung:

Aufgrund der Beziehung $\int [g(x)]^n g'(x)\, dx = \frac{1}{n+1}[g(x)]^{n+1}$ für natürliche n gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sin x \\
g'(x) &= \cos x \\
\int \sin^5 x \cos x\, dx &= \frac{1}{6}\sin^6 x + c
\end{aligned}$$

Ohne Kenntnis obiger Formel erreicht man mit ausführlicherer Rechnung:

$$\begin{aligned}
t &= \sin x \\
dx &= \frac{dt}{\cos x} \\
\int \sin^5 x \cos x\, dx &= \int t^5\, dt \\
&= \frac{1}{6} t^6 + c \\
&= \frac{1}{6}\sin^6 x + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.2.5.

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

Lösung:

$$t = e^x$$
$$dx = e^{-x}\; dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx &= \int \frac{e^x}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)}\, dx \\
&= \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx \\
&= \int \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&= \arctan t + c \\
&= \arctan e^x + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.3.

Integrieren Sie, indem Sie das Integral geeignet zerlegen.

Aufgabe 15.3.1.

$$\int \sin^2 x\; dx$$

Lösung:

Es gilt: $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$. Damit ergibt sich:

$$u = \sin x$$
$$u' = \cos x$$
$$v' = \sin x$$
$$v = -\cos x$$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\; dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\; dx \\
&= -\frac{\sin 2x}{2} + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx \\
&= -\frac{\sin 2x}{2} + \int dx - \int \sin^2 x\; dx \\
2\int \sin^2 x\; dx &= -\frac{\sin 2x}{2} + x + c \\
\int \sin^2 x\; dx &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.3.2.

$$\int \sin x \sin(x+a)\,dx$$

Lösung:

Die Additionstheoreme besagen, dass $\sin(x \pm a) = \sin x \cos a \pm \cos x \sin a$. Bezogen auf das Beispiel ist *a* konstant, daher auch der Sinus bzw. Kosinus davon.
Ich benutze auch das Ergebnis aus der vorherigen Aufgabe.

$$\begin{aligned}
\int \sin x \sin(x+a)\,dx &= \int \sin x (\sin x \cos a + \cos x \sin a) dx \\
&= \int \sin^2 x \cos a \; dx + \int \sin x \cos x \sin a \; dx \\
&= \cos a \int \sin^2 x \; dx + \frac{\sin a}{2} \int \sin 2x \; dx \\
&= \cos a \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) - \frac{\sin a}{4} \cos 2x + c \\
&= \frac{x}{2} \cos a - \frac{1}{4} (\cos a \sin 2x - \sin a \cos 2x) + c \\
&= \frac{x}{2} \cos a - \frac{1}{4} \sin(2x - a) + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.3.3.

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
t &= e^x \\
dx &= e^{-x} \; dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^x}\,dx &= \int \frac{e^x}{e^x(1+e^x)}\,dx \\
&= \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt \\
&= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{t+1}\,dt \\
&= \ln|t| - \ln|t+1| + c \\
&= \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + c \\
&= \ln \frac{e^x}{1+e^x} + c
\end{aligned}$$

Aufgabe 15.4.

Integrieren Sie partiell.

Aufgabe 15.4.1.

$$\int \sqrt{x}(\ln x)^2\ dx$$

Lösung:

$$t = \sqrt{x}$$
$$dx = 2\sqrt{x}\ dt$$
$$\int \sqrt{x}(\ln x)^2\ dx = 2\int \left(t\ln t^2\right)^2\ dt$$
$$= 2\int (2t\ln t)^2\ dt$$
$$= 8\int (t\ln t)^2\ dt$$
$$u' = t^2$$
$$u = \frac{1}{3}t^3$$
$$v = (\ln t)^2$$
$$v' = 2\ln t \cdot \frac{1}{t}$$
$$\int (t\ln t)^2\ dt = \frac{1}{3}t^3(\ln t)^2 - \int \frac{1}{3}t^3\,2\ln t\cdot\frac{1}{t}\ dt$$
$$= \frac{1}{3}t^3(\ln t)^2 - \frac{2}{3}\int t^2 \ln t\ dt$$
$$u' = t^2$$
$$u = \frac{1}{3}t^3$$
$$v = \ln t$$
$$v' = \frac{1}{t}$$
$$\int t^2 \ln t\ dt = \frac{1}{3}t^3\ln t - \frac{1}{3}\int t^2\ dt$$
$$= \frac{1}{3}t^3\ln t - \frac{1}{9}t^3 + c$$
$$\int \sqrt{x}(\ln x)^2\ dx = 8\left(\frac{1}{3}t^3(\ln t)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}t^3\ln t - \frac{1}{9}t^3\right)\right) + c$$
$$= \frac{8}{3}x\sqrt{x}\left(\ln\sqrt{x}\right)^2 - \frac{16}{9}x\sqrt{x}\ln\sqrt{x} + \frac{16}{27}x\sqrt{x} + c$$

Aufgabe 15.4.2.

$$\int \arctan x \, dx$$

Lösung:

$$u' = 1$$
$$u = x$$
$$v = \arctan x$$
$$v' = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int \arctan x \, dx = \int \arctan x \, dx$$
$$= x \arctan x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx$$
$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx$$

$$t = x^2 + 1$$
$$dt = \frac{1}{2x} dx$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \int \frac{1}{t} \, dt$$
$$= \ln|t| + c$$
$$= \ln\left(x^2+1\right) + c$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + c$$

Aufgabe 15.4.3.

$$\int \arctan\sqrt{x}\ dx$$

Lösung:

$$u'=1$$
$$u=x$$
$$v=\arctan\sqrt{x}$$
$$v'=-\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\int \arctan\sqrt{x}\ dx = x\arctan\sqrt{x}+\int x\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx$$
$$= x\arctan\sqrt{x}+\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}\ dx$$

$$t=\sqrt{x}$$
$$dx=-2t\ dt$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}\ dx=-\int\frac{t^2}{t^2+1}\ dt$$
$$=-\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$
$$=-t+\arctan t+c$$
$$=-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$$

$$\int \arctan\sqrt{x}\ dx = x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$$

Aufgabe 15.4.4.

$\int \sin x \ln \tan x \, dx$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
u &= \ln \tan x \\
u' &= \frac{1}{\tan x \cos^2 x} = \sin x \cos x = \\
v' &= \sin x \\
v &= -\cos x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \sin x \ln \tan x \, dx &= -\cos x \ln \tan x + \int \sin x \cos^2 x \, dx \\
&= -\cos x \ln \tan x - \int (-\sin x) \cos^2 x \, dx \\
&= -\cos x \ln \tan x - \frac{1}{3} \cos^3 x + c
\end{aligned}
$$

Die Vorgehensweise zur sofortigen Bestimmung von $\int (-\sin x) \cos^2 x \, dx$ entspricht der aus Aufgabe 15.2.4. .

<u>Aufgabe 15.4.5.</u>

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx$$

Lösung:

$$u = \arcsin x$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v' = \frac{1}{x^2}$$

$$v = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$t = \frac{1}{x}$$

$$dx = -\frac{1}{x^2}\, dt$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\int \frac{t}{t^2\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}\, dt$$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\, dt$$

$$= -\operatorname{arccos} hyp\; t + c$$

$$= -\operatorname{arccos} hyp\; \frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\, dx = -\frac{\arcsin x}{x} - \operatorname{arccos} hyp\; \frac{1}{x} + c$$

Aufgabe 15.4.6.

$$\int xe^{-x}\ dx$$

Lösung:

$$u = x$$
$$u' = 1$$
$$v' = e^{-x}$$
$$v = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}\ dx &= -xe^{-x} - \int -e^{-x} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + c \\ &= -e^{-x}(1+x) + c\end{aligned}$$

Aufgabe 15.4.7.

$$\int x^2 \sin 2x\ dx$$

Lösung:

$$u = x^2$$
$$u' = 2x$$
$$v' = \sin 2x$$
$$v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int x^2 \sin 2x\ dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \int x \cos 2x\ dx$$

$$u = x$$
$$u' = 1$$
$$v' = \cos 2x$$
$$v = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\begin{aligned}\int x \cos 2x\ dx &= \frac{x}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\ dx \\ &= \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c\end{aligned}$$

$$\int x^2 \sin 2x\ dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$$