

Aufgabe 15.1.

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale, indem Sie die Tabelle der „Grundintegrale“ verwenden.

Aufgabe 15.1.1.

$$\int \frac{(1-x)^3}{x^4 \sqrt{x}} dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1-x)^3}{x^4 \sqrt{x}} dx &= \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^{\frac{5}{4}}} dx \\ &= \int \left(x^{-\frac{5}{4}} - 3x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{7}{4}} \right) dx \\ &= -\frac{1}{4} x^{-\frac{1}{4}} - 4x^{\frac{3}{4}} + \frac{12}{7} x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{11} x^{\frac{11}{4}} + c \\ &= -\frac{1}{4\sqrt[4]{x}} - 4\sqrt[4]{x^3} + \frac{12}{7} x^4 \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{11} x^2 \sqrt[4]{x^3} + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.2.

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx &= \int (1 - x^{-2}) x^{\frac{3}{4}} dx \\ &= \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}} \right) dx \\ &= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + c \\ &= \frac{4}{7} x^4 \sqrt[4]{x^3} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.3.

$$\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx &= \int \frac{2x - 2\sqrt{2x}\sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{9x^2}}{x} dx \\ &= \int \frac{2x - 2x^{\frac{2}{3}}\sqrt{2}\sqrt[3]{3} + x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{9}}{x} dx \\ &= \int 2 - 2\sqrt{2}\sqrt[3]{3}x^{-\frac{1}{3}} + \sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}} dx \end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.4.

$$\int x^2(5-x)^4 dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int x^2(5-x)^4 dx &= \int x^2(625 - 500x + 150x^2 - 20x^3 + x^4) dx \\ &= \int (625x^2 - 500x^3 + 150x^4 - 20x^5 + x^6) dx \\ &= \frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.5.

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int (1-x)(1-2x)(1-3x) dx &= \int (1-3x+2x^2)(1-3x) dx \\ &= \int (1-6x+11x^2-6x^3) dx \\ &= x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.6.

$$\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx &= \int (ax^{-1} + a^2x^{-2} + a^3x^{-3}) dx \\ &= a \ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.7.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.1.8.

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx &= \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}} \right) dx \\ &= \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + c \\ &= \frac{4}{5} x^4 \sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{12} \sqrt[5]{x} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.2.

Lösen Sie die nachfolgenden Aufgaben, indem Sie geeignet substituieren.

Aufgabe 15.2.1.

$$\int \frac{x}{3-2x^2} dx$$

Lösung:

$$t = 3 - 2x^2$$

$$t' = -4x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{3-2x^2} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{t'}{t} dt \\ &= -\frac{\ln|3-2x^2|}{4} + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.2.2.

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

Lösung:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + c$$

Aufgabe 15.2.3.

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx$$

Lösung:

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx = \ln \ln \ln x + c$$

Aufgabe 15.2.4.

$$\int \sin^5 x \cos x dx$$

Lösung:

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \frac{\sin^6 x}{6} + c$$

Aufgabe 15.2.5.

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

Lösung:

$$t =$$

$$t' =$$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \arctan e^x + c$$

Aufgabe 15.3.

Integrieren Sie, indem Sie das Integral geeignet zerlegen.

Aufgabe 15.3.1.

$$\int \sin^2 x dx$$

Lösung:

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

Aufgabe 15.3.2.

$$\int \sin x \sin(x+a) dx$$

Lösung:

$$\int \sin x \sin(x+a) dx = \frac{x}{2} \cos a - \frac{1}{4} \sin(2x+a) + c$$

Aufgabe 15.3.3.

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

Lösung:

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \ln \frac{e^x}{1+e^x} + c$$

Aufgabe 15.4.

Integrieren Sie partiell.

Aufgabe 15.4.1.

$$\int \sqrt{x} (\ln x)^2 dx$$

Lösung:

$$\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx = \frac{8}{3}x\sqrt{x}\ln^2 \sqrt{x} - \frac{16}{9}x\sqrt{x}\ln \sqrt{x} + \frac{16}{27}x\sqrt{x} + c$$

Aufgabe 15.4.2.

$$\int \arctan x dx$$

Lösung:

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Aufgabe 15.4.3.

$$\int \arctan \sqrt{x} dx$$

Lösung:

$$\int \arctan \sqrt{x} dx = x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + c$$

Aufgabe 15.4.4.

$$\int \sin x \ln \tan x dx$$

Lösung:

$$\int \sin x \ln \tan x dx =$$

Aufgabe 15.4.5.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

Lösung:

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = \frac{\arcsin x}{x} - \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} + c$$

Aufgabe 15.4.6.

$$\int xe^{-x} dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \int xe^{-x} dx &= e^{-x}(-x-1) + c \\ &= -e^{-x}(x+1) + c \end{aligned}$$

Aufgabe 15.4.7.

$$\int x^2 \sin 2x \, dx$$

Lösung:

$$\int x^2 \sin 2x \, dx = \frac{x}{2} \sin 2x - \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \cos 2x + c$$