Aufgabe 3.1.1.

Zeigen Sie, dass die Folge $p_k = \left\langle 1+\frac{1}{k} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ konvergiert und der Grenzwert 1 ist, d.h. es gilt: $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=1$

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass $\langle p_k - 1\rangle$ eine Nullfolge ist:

$$\left\langle 1+\frac{1}{k}\right\rangle - \langle 1\rangle$$
$$=\left\langle 1+\frac{1}{k}-1\right\rangle$$
$$=\left\langle \frac{1}{k}\right\rangle$$

Da $\left\langle \frac{1}{k}\right\rangle$ eine Nullfolge ist, stellt p_k eine konvergente Folge mit dem Grenzwert 1 dar.

Aufgabe 3.1.2.

Zeigen Sie, dass die Folge $\left\langle 1+(-1)^k \frac{1}{k} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ konvergiert und der Grenzwert 1 ist, d.h. $\lim_{k\to\infty}\left(1+(-1)^k\frac{1}{k}\right)=1$!

Lösung:

Die Vorgehensweise gleicht der aus Aufgabe 3.1.1.:

$$\left\langle 1+(-1)^k\frac{1}{k}\right\rangle - \langle 1\rangle$$
$$=\left\langle 1+(-1)^k\frac{1}{k}-1\right\rangle$$
$$=\left\langle (-1)^k\frac{1}{k}\right\rangle$$

Der Faktor $(-1)^k$ beeinflusst nur das Vorzeichen (er ist immer +1 oder –1), der eigentliche Wert der Folge wird durch k^{-1} bestimmt, was wiederum eine Nullfolge ist (die sich mit alternierendem Vorzeichen der Null nähert).

Aufgabe 3.1.3.

Zeigen Sie, dass die Folge $\left\langle (-1)^k \left(1+\frac{1}{k}\right)\right\rangle_{k=1}^{\infty}$ nicht konvergiert !

Lösung:

Wenn k eine gerade Zahl ist ($k=2n$, $n\in\aleph$), entspricht p_k exakt der Folge aus Aufgabe 3.1.1., konvergiert demzufolge gegen 1. Für $k=2n+1$, $n\in\aleph$, ergibt sich

$$\left\langle (-1)^k \left(1+\frac{1}{k}\right)\right\rangle, k = 2n+1, n \in ℵ$$
$$= \left\langle -\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\rangle$$

Der Grenzwert ist hier -1 (vergleiche wieder mit Aufgabe 3.1.1.).
Jede dieser beiden Teilfolgen hat einen eindeutigen Grenzwert, der jeweils einen Häufungswert der Gesamtfolge darstellt. Da die Gesamtfolge aber zwei voneinander verschiedene Häufungswerte hat, kann sie nicht konvergieren.

<u>Aufgabe 3.1.4.</u>

Zeigen Sie, dass die Folge $\langle k \rangle_{k=1}^{\infty}$ nicht konvergiert !

Lösung:

Das Cauchykriterium besagt, dass eine reelle Zahlenfolge genau dann gegen eine reelle Zahl konvergiert, wenn sie eine Cauchyfolge ist. Sollte obige Folge konvergieren, müsste sie alle Eigenschaften eine Cauchyfolge besitzen (jeweils für alle reellen ε>0):
$|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0(\varepsilon)$
Angewandt auf die gegebene Folge entspricht dies:
$|n - m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0(\varepsilon)$
Schon für ε=1 lässt sich nur die Lösung n=m (wie groß n bzw. m sind, ist dabei irrelevant) finden. Diese genaue Spezifikation ist aber durch die Ungleichung „für alle $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ " nicht herstellbar. Damit kann $\langle k \rangle_{k=1}^{\infty}$ keine Cauchyfolge sein und ist damit auch nicht konvergent.

<u>Aufgabe 3.2.1.</u>

Weisen Sie nach, dass die Folge $\langle k \rangle_{k=1}^{\infty}$ keine Cauchyfolge ist !

Lösung:

siehe 3.1.4.

<u>Aufgabe 3.2.2.</u>

Weisen Sie nach, dass die Folge $\langle p_k \rangle_{k=1}^{\infty}$, mit $p_1 := 1$ und $p_{k+1} := 1 + \frac{1}{1+p_k}$, k∈ ℵ, eine Cauchyfolge ist.

Zeigen Sie, dass die Folge nicht konvergent in *Q* ist !

Lösung:

Es ist zu zeigen, dass für alle reellen positiven ε mit $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ die Ungleichung $|p_n - p_m| < \varepsilon$ gilt.
Der Startwert p_1 ist eine rationale Zahl und jedes endliche Folgenglied lässt sich als solche darstellen, da nur elementare Operationen in *Q* verwendet werden (Addition und Division). Somit kann ich jedes Folgenglied darstellen als: $p_k = \frac{a_k}{b_k}$. Für p_{k+1} kann ich dann entwickeln:

$$p_{k+1} := 1 + \frac{1}{1+p_k}$$

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} := 1 + \frac{1}{1+\frac{a_k}{b_k}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{b_k + a_k}{b_k}}$$

$$= 1 + \frac{b_k}{b_k + a_k}$$

$$= \frac{b_k + a_k + b_k}{b_k + a_k}$$

$$= \frac{a_k + 2b_k}{a_k + b_k}$$

Für p_k-p_{k+1} ergibt sich:

$$p_k - p_{k+1} = \frac{a_k}{b_k} - \frac{a_k + 2b_k}{a_k + b_k}$$

$$= \frac{a_k(a_k + b_k) - b_k(a_k + 2b_k)}{b_k(a_k + b_k)}$$

$$= \frac{a_k^2 + a_k b_k - a_k b_k - 2b_k^2}{a_k b_k + b_k^2}$$

$$= \frac{a_k^2 - 2b_k^2}{a_k b_k + b_k^2}$$

Die Ursprungsfolge konvergiert genau dann, wenn $\lim_{k\to\infty}(p_k - p_{k+1}) = 0$. In obiger Gleichung bedeutet dies, dass $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k^2 - 2b_k^2}{a_k b_k + b_k^2} = 0$. Daraus folgt, dass $\lim_{k\to\infty}(a_k^2 - 2b_k^2) = 0$, d.h. für sehr große *k* ist

$$a_k^2 = 2b_k^2$$

$$|a_k| = \sqrt{2}|b_k|$$

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| = \sqrt{2}$$

Da a_k und b_k stets positiv sind (a_1=b_1=1 und a_{k+1}=a_k+2b_k, b_{k+1}= a_k+b_k), können die Betragsstriche entfernt werden: $\frac{a_k}{b_k} = \sqrt{2}$

Dass $\sqrt{2} \notin Q$ gilt, ist mehrfach bewiesen worden und daher als bekannt vorausgesetzt.
Somit hat zwar die Zahlenfolge einen berechenbaren Grenzwert, dieser stellt aber keine rationale Zahl dar.

<u>Aufgabe 3.3.1.</u>

Zeigen Sie, dass die Folgen $\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ und $\left\langle \frac{1}{k^2} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ äquivalent sind !

Lösung:

Zwei Folgen sind genau dann äquivalent, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Bezogen auf die gegebenen Folgen entsteht:

$$\left\langle \frac{1}{k} \right\rangle_{k=1}^{\infty} - \left\langle \frac{1}{k^2} \right\rangle_{k=1}^{\infty} = \left\langle \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$$

Da k^2 schneller wächst als k und stets positiv ist, gilt: $0 < \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\frac{1}{k}$ eine Nullfolge ist. Somit muss $\left\langle \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right\rangle_{k=1}^{\infty}$ auch eine Nullfolge sein.

<u>Aufgabe 3.3.2.</u>

Zeigen Sie, dass die Folge $\left\langle p_k \right\rangle_{k=1}^{\infty}$, definiert in Aufgabe 3.2.2., und die Folge $\left\langle q_k \right\rangle_{k=1}^{\infty}$, mit $q_1 := 1$ und $q_{k+1} := 1 + \frac{q_k}{2 + q_k}$, $k \in \aleph$, äquivalent sind !

Lösung:

Wiederum ist zu zeigen, dass die Differenz beiden Folgen eine Nullfolge ist.

$\left\langle 1 + \frac{1}{1 + p_k} \right\rangle - \left\langle 1 + \frac{q_k}{2 + q_k} \right\rangle$. Es muss dabei gelten, dass $p_k = q_k$ (da auch gleicher Startwert):

$$\begin{aligned}
\left\langle 1 + \frac{1}{1 + p_k} \right\rangle - \left\langle 1 + \frac{p_k}{2 + p_k} \right\rangle &= \left\langle 1 + \frac{1}{1 + p_k} - 1 - \frac{p_k}{2 + p_k} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{1 + p_k} - \frac{p_k}{2 + p_k} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{(2 + p_k) - p_k(1 + p_k)}{(1 + p_k)(2 + p_k)} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{2 + p_k - p_k - p_k^2}{2 + p_k + 2p_k + p_k^2} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{-p_k^2 + 2}{p_k^2 + 3p_k + 2} \right\rangle
\end{aligned}$$

Es wurde in Aufgabe 3.2.2. gezeigt, dass $\lim_{k \to \infty} p_k = \sqrt{2}$. Setzt man diesen Grenzwert in die gewonnene Gleichung ein, ergibt sich:

$$\left\langle \frac{-\sqrt{2}^2+2}{\sqrt{2}^2+3\sqrt{2}+2} \right\rangle = \left\langle \frac{-2+2}{2+3\sqrt{2}+2} \right\rangle$$
$$= \left\langle \frac{0}{4+3\sqrt{2}} \right\rangle$$
$$= 0$$

Somit geht für p_k, die sehr nahe gegen ihren Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = \sqrt{2}$ gehen, die Folge $\langle p_k \rangle_{k=1}^{\infty} - \langle q_k \rangle_{k=1}^{\infty}$ gegen Null.

<u>Aufgabe 3.4.</u>

Beweisen Sie, dass die Multiplikation von komplexen Zahlen kommutativ ist, d.h. es gilt $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$!

Lösung:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \end{aligned}$$

Da a_1, a_2, b_1 und b_2 reelle Zahlen sind und die Kommutativität sowohl der Addition als auch der Multiplikation bereits in der Vorlesung nachgewiesen wurde, gilt:

$$\begin{aligned} &= (a_2 a_1 - b_2 b_1) + (a_2 b_1 + a_1 b_2) i \\ &= (a_2 + b_2 i) \cdot (a_1 + b_1 i) \\ &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

Somit wurde gezeigt, dass die Multiplikation komplexer Zahlen kommutativ ist.

<u>Aufgabe 3.5.</u>

Beweisen Sie, dass die Ungleichung $\left| |z_1| - |z_2| \right| \le |z_1 - z_2|$ im Bereich der komplexen Zahlen besteht !

Lösung:

Zwei wichtige Eigenschaften der komplexen Zahlen werden vorausgesetzt (a,b sind reelle Zahlen):

I. $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

II. $\quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$

Damit lässt sich herleiten:

$$\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 - z_2|$$

$$\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right| \le |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i|$$

$$\left|\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right| \le \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$\left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2} - \sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right)^2 \le (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2$$

$$(a_1^2 + b_1^2) - 2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} + (a_2^2 + b_2^2) \le (a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) + (b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2)$$

$$-2\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \le -2a_1a_2 - 2b_1b_2$$

$$\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)} \ge a_1a_2 + b_1b_2$$

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \ge (a_1a_2 + b_1b_2)^2$$

$$a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + b_1^2b_2^2 \ge a_1^2a_2^2 + 2a_1a_2b_1b_2 + b_1^2b_2^2$$

$$a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \ge 2a_1a_2b_1b_2$$

$$a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \ge 0$$

$$(a_1b_2 - b_1a_2)^2 \ge 0$$

Da weiterhin $x^2 \ge 0$ für alle x gilt, ist die Ungleichung bewiesen worden.