<u>Aufgabe 6.1.</u>

Man zeige durch vollständige Induktion, dass

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2n+1}$$

$$a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

($n \in N$) gilt und beweise damit die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$!

Lösung:

I. <u>Induktionsanfang</u>:

Für n=1 gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$$

$$\frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

II. <u>Induktionsschritt</u>:

$$\begin{aligned}
s_n + a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2n+3} \\
&= \frac{(n+1)}{2(n+1)+1} \\
&= s_{n+1}
\end{aligned}$$

III. Induktionsschluss:

Da $s_n + a_{n+1} = s_{n+1}$ gezeigt wurde, trifft die Aussage $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ für alle n∈N zu.

Aufgabe 6.2.

Man zeige, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist.

Lösung:

Die Anwendung der Assoziativgesetze und eine passende Abschätzung ergibt:

$$
\begin{aligned}
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

Da jedes Element der harmonischen Reihe stets größer als die abgeschätzte, divergente Reihe ist, ist auch die harmonische Reihe divergent.

Aufgabe 6.3.

Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(7 + \frac{1}{k}\right)^k}{7^{k+1}}$ divergent ist.

Lösung:

Durch Umformen von a_k ergibt sich:

$$\frac{\left(7+\frac{1}{k}\right)^k}{7^{k+1}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{\left(7+\frac{1}{k}\right)^k}{7^k}$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7+\frac{1}{k}}{7}\right)^k$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(1+\frac{1}{7k}\right)^k$$

$$> \frac{1}{7}$$

Dies ist keine Nullfolge, somit ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(7+\frac{1}{k}\right)^k}{7^{k+1}}$ divergent.

<u>Aufgabe 6.4.</u>

Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+3^k}{4^k+5^k}$ konvergent ist.

Lösung:

Folgende Abschätzung nach dem Majorantenkriterium erzeugt:

$$\frac{2^k+3^k}{4^k+5^k} \le \frac{3^k+3^k}{4^k+4^k} = \frac{2\cdot 3^k}{2\cdot 4^k} = \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Diese Reihe konvergiert für alle k, demzufolge konvergiert auch die gegebene Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+3^k}{4^k+5^k}$.

<u>Aufgabe 6.5.</u>

Man beweise die Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für (jeweils $k \in N$)

I. $\quad a_k = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

II. $\quad a_k = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$

Lösung:

I. Es ist

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$>\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{16}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(n-1+1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$
$$=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$
$$=\left(\frac{1}{n+1}-1\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Da bereits in Aufgabe 6.2. gezeigt, dass die harmonische Reihe $\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}$ divergent ist und für große n auch $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}-1\right)=-1$ ist, ist $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ eine divergente Reihe.

II. Die Abschätzung

$$\frac{1}{\sqrt{k^4+1}}<\frac{1}{\sqrt{k^4}}=\frac{1}{k^2}$$

lässt schlussfolgern, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$ eine konvergente Reihe ist, da auch $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Aufgabe 6.6.

Man zeige die Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{k}$.

Lösung:

In der Vorlesung ist gezeigt worden, dass die Folge $a_k=\frac{1}{k}$ eine Nullfolge ist. Somit trifft auf $s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{k}$ das Leibnizkriterium für alternierende Reihen zu, welches besagt, dass, wenn a_k eine monoton fallende Nullfolge ist, auch s_n konvergiert.

Aufgabe 6.7.

Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihen ($x\in R$)

I. $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2k^3}{k^2-4}x^k$

II. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{2k^2+k}x^k$

Lösung:

I. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe in R ist:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{2k^3}{k^2-4}}{\frac{2(k+1)^3}{(k+1)^2-4}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k^3\left((k+1)^2-4\right)}{\left(k^2-4\right)2(k+1)^3}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^3\left(k^2+2k-3\right)}{\left(2k^2-4\right)\left(k^3+3k^2+3k+1\right)}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^5+2k^4+3k^3}{k^5+3k^4-k^3-11k^2-12k-4}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^5}{k^5}\right| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

II. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe in R ist:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{k+1}{2k^2+k}}{\dfrac{k+2}{2(k+1)^2+k+1}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{k+1}{2k^2+k}}{\dfrac{k+2}{2k^2+5k+3}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(2k^2+5k+3)}{(2k^2+k)(k+2)}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k^3+7k^2+8k+3}{2k^3+5k^2+2k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k^3}{2k^3}\right| \\
&= 1
\end{aligned}
$$