<u>Aufgabe 6.1.</u>

Man zeige durch vollständige Induktion, dass

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2n+1}$$

$$a_k = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

($n \in N$) gilt und beweise damit die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$!

Lösung:

I. <u>Induktionsanfang</u>:

Für n=1 gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2\cdot 1+1}$$

$$\frac{1}{(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

II. <u>Induktionsschritt</u>:

$$\begin{aligned}
s_n + a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n+1}{2n+3} \\
&= \frac{(n+1)}{2(n+1)+1} \\
&= s_{n+1}
\end{aligned}$$

III. <u>Induktionsschluss</u>:

Da $s_n + a_{n+1} = s_{n+1}$ gezeigt wurde, trifft die Aussage $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ für alle n∈N zu.

<u>Aufgabe 6.2.</u>

Man zeige, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent ist.

Lösung:

Die Anwendung der Assoziativgesetze und eine passende Abschätzung ergibt:

$$
\begin{aligned}
s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{n}{2}
\end{aligned}
$$

Da jedes Element der harmonischen Reihe stets größer als die abgeschätzte, divergente Reihe ist, ist auch die harmonische Reihe divergent.

<u>Aufgabe 6.3.</u>

Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(7 + \frac{1}{k}\right)^k}{7^{k+1}}$ divergent ist.

Lösung:

Durch Umformen von a_k ergibt sich:

$$\frac{\left(7+\frac{1}{k}\right)^k}{7^{k+1}} = \frac{1}{7}\cdot\frac{\left(7+\frac{1}{k}\right)^k}{7^k}$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(\frac{7+\frac{1}{k}}{7}\right)^k$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\left(1+\frac{1}{7k}\right)^k$$

$$> \frac{1}{7}$$

Dies ist keine Nullfolge, somit ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(7+\frac{1}{k}\right)^k}{7^{k+1}}$ divergent.

<u>Aufgabe 6.4.</u>

Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+3^k}{4^k+5^k}$ konvergent ist.

Lösung:

Der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder ist:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{2^{k+1}+3^{k+1}}{4^{k+1}+5^{k+1}}}{\frac{2^k+3^k}{4^k+5^k}}$$

$$= \frac{\left(2^{k+1}+3^{k+1}\right)\left(4^k+5^k\right)}{\left(2^k+3^k\right)\left(4^{k+1}+5^{k+1}\right)}$$

$$= \frac{2^{k+1}4^k+2^{k+1}5^k+3^{k+1}4^k+3^{k+1}5^k}{2^k4^{k+1}+2^k5^{k+1}+3^k4^{k+1}+3^k5^{k+1}}$$

$$= \frac{2^k4^k2+2^k5^k2+3^k4^k3+3^k5^k3}{2^k4^k4+2^k5^k5+3^k4^k4+3^k5^k5}$$

Jedem Summanden im Zähler kann ein Summand im Nenner zugeordnet werden, der die gleichen Potenzen bei gleicher Basis aufweist und sich nur durch einen Koeffizienten unterscheidet. Dabei ist für alle k der entsprechende Koeffizient im Zähler kleiner als im Nenner:

$2^k 4^k 2 < 2^k 4^k 4$

$2^k 5^k 2 < 2^k 5^k 5$

$3^k 4^k 3 < 3^k 4^k 4$

$3^k 5^k 3 < 3^k 5^k 5$

Daraus folgt:

$$\frac{2^k 4^k 2 + 2^k 5^k 2 + 3^k 4^k 3 + 3^k 5^k 3}{2^k 4^k 4 + 2^k 5^k 5 + 3^k 4^k 4 + 3^k 5^k 5} = \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$$

Dies entspricht dem Quotientenkriterium von d'Alembert, das als Konsequenz die Konvergenz obiger Partialsummenfolge hat.

Aufgabe 6.5.

Man beweise die Konvergenz oder Divergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für (jeweils $k \in N$)

I. $a_k = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

II. $a_k = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$

Lösung:

I. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \\
&> \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{16}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{(n-1+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \\
&= \sum_{2}^{n+1} \frac{1}{k} \\
&= \left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) + \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Da bereits in Aufgabe 6.2. gezeigt, dass die harmonische Reihe $\sum_{1}^{n} \frac{1}{k}$ divergent ist und für große n auch $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) = -1$ ist, ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ eine divergente Folge.

II. Die Abschätzung

$$\frac{1}{\sqrt{k^4+1}} < \frac{1}{\sqrt{k^4}} = \frac{1}{k^2}$$

lässt schlussfolgern, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$ eine konvergente Folge ist, da auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Aufgabe 6.6.

Man zeige die Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$.

Lösung:

In der Vorlesung ist gezeigt worden, dass die Folge $a_k = \frac{1}{k}$ eine Nullfolge ist. Somit trifft auf $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ das Leibnizkriterium für alternierende Reihen zu, welches besagt, dass, wenn a_k eine monoton fallende Nullfolge ist, auch s_n konvergiert.

Aufgabe 6.7.

Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihen ($x \in R$)

I. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2k^3}{k^2-4} x^k$

II. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^2+k} x^k$

Lösung:

I. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe in R ist:

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{2k^3}{k^2-4}}{\frac{2(k+1)^3}{(k+1)^2-4}}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k^3\left((k+1)^2-4\right)}{\left(k^2-4\right)2(k+1)^3}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^3\left(k^2+2k-3\right)}{\left(2k^2-4\right)\left(k^3+3k^2+3k+1\right)}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^5+2k^4+3k^3}{k^5+3k^4-k^3-11k^2-12k-4}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^5}{k^5}\right|$$
$$= 1$$

II. Der Konvergenzradius dieser Potenzreihe in R ist:

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{k+1}{2k^2+k}}{\frac{k+2}{2(k+1)^2+k+1}}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{k+1}{2k^2+k}}{\frac{k+2}{2k^2+5k+3}}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)\left(2k^2+5k+3\right)}{\left(2k^2+k\right)(k+2)}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k^3+7k^2+8k+3}{2k^3+5k^2+2k}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k^3}{2k^3}\right|$$
$$= 1$$