Aufgabe 7.1.

Man zeige, dass die verallgemeinerte harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ für $s \in (0,1]$ divergent und für s>1 konvergent ist.

Lösung:

Der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder der verallgemeinerten harmonischen Reihe ergibt:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)^s}}{\frac{1}{k^s}} = \frac{k^s}{(k+1)^s} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^s$$

Weiter gilt:

$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$, wobei dies eine streng monoton steigende Folge ist, d.h. 0<a_k<1. In diesem Zahlenbereich ist: $a_k^s < a_k$ für s>1 und $a_k^s > a_k$ für s<1. Da sich für s<1 für große k nicht immer ein q finden lässt, so dass $\frac{a_{k+1}}{a_k} < q < 1$ stets gilt, sind diese Reihen divergent. Die Reihe für s=1 ist ebenfalls divergent, das wurde in der Vorlesung bereits gezeigt. Für s>1 lässt sich dagegen immer ein q finden, diese Reihen sind konvergent.

Aufgabe 7.2.

Man zeige, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^k}$ für $a \in (0,1]$ divergent und für a>1 konvergent ist.

Lösung:

Nach dem Wurzelkriterium ist $\sqrt[k]{\frac{1}{1+a^k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{1+a^k}}$.

Für a>1 ist a^k>1, somit $\frac{1}{\sqrt[k]{1+a^k}} < \frac{1}{\sqrt[k]{2}} < 1$, was die Konvergenz für a>1 bestätigt.

Für a<=1 ist a^k<=1, somit $\frac{1}{\sqrt[k]{1+a^k}} \geq \frac{1}{\sqrt[k]{2}}$, was zu $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{2}} = 1$ führt, was nicht für alle k die für das Wurzelkriterium notwendige Ungleichung $\frac{1}{\sqrt[k]{2}} < q < 1$ erfüllen lässt.

Aufgabe 7.3.

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ divergent ist.

Lösung:

Aufgabe 7.4.

Zeigen Sie die Konvergenz oder Divergenz der folgenden Reihen:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k^2+1)}}$
3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^p}$, p>0
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$
5. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$
6. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln(\ln k))^{\ln k}}$
7. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln(\ln k)}}$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a+bk)^s}$, a,b,s > 0
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{x}{k}$, 0<x<π
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x}{k}\right)$, 0<x<π

Lösung:

1. Diese Reihe ist divergent, da sich nicht für alle *k* das Quotientenkriterium für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ erfüllen lässt.

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}}{\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}} = \frac{\sqrt{k(k+1)}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} = \sqrt{\frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)}} = \sqrt{\frac{k}{k+2}}$. Der Grund liegt darin, dass

$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+2} = 1$ mit der Nebenbemerkung, dass $\frac{k}{k+2} < \sqrt{\frac{k}{k+2}} < 1$ für große k die Wurzel nicht immer unter 1 halten kann.

2. Das Quotientenkriterium zeigt, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k^2+1)}}$ divergiert:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\frac{1}{\sqrt{(k+1)((k+1)^2+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{k(k^2+1)}}}=\frac{\sqrt{k(k^2+1)}}{\sqrt{(k+1)((k+1)^2+1)}}=\sqrt{\frac{k(k^2+1)}{(k+1)((k+1)^2+1)}}$$

$$=\sqrt{\frac{k^3+k}{(k+1)(k^2+2k+2)}}=\sqrt{\frac{k^3+k}{k^3+3k^2+4k+2}}$$

Die Begründung ist die gleiche wie in Aufgabe 7.4.1.

3. Die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^p}$, p>0, konvergiert, da für k>e (d.h. ln k>1)für das Wurzelkriterium folgendes gilt:

$$\sqrt[k]{\frac{1}{(\ln k)^p}}=\frac{1}{\sqrt[k]{(\ln k)^p}}=\frac{1}{(\ln k)^{\frac{p}{k}}}<1$$

4. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$ ist konvergent, da das Quotientenkriterium

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}}=\frac{k^k(k+1)!}{(k+1)^{k+1}k!}=\frac{k^k k!(k+1)}{(k+1)^k k!(k+1)}=\frac{k^k}{(k+1)^k}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$

ergibt und der entstehende Term dem aus Aufgabe 7.1. gleicht.

5. Für k_0>15 (≈e^e) gilt $\ln k>e$ und damit für das Majorantenkriterium:

$$\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}<\frac{1}{e^{\ln k}}=\frac{1}{k}$$

Da für $\frac{1}{k^s}$ mit s<1 die Konvergenz in 7.1. bewiesen wurde, ist auch $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$ konvergent:

6. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie in 7.4.5., nur ist k_0 größer: $k_0=e^{e^e}=3814280$. Auch diese Folge ist somit konvergent:

$$\frac{1}{(\ln(\ln k))^{\ln k}}<\frac{1}{e^{\ln k}}=\frac{1}{k}$$

7. Gemäß Aufgabe 7.4.3. ist $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^{\ln(\ln k)}}$ konvergent, da k>e der Exponent positiv ist und $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^p}$ für p>0 konvergiert.

8. a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(a+bk)^s}$, a,b,s > 0

9. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$ konvergiert laut Aufgabe 7.1., da

$\frac{1}{k\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{k \cdot k^{\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ und für s>1 die verallgemeinerte harmonische Reihe $\frac{1}{k^s}$ konvergiert.

10. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{x}{k}$, 0<x<π

11. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{x}{k}\right)$, 0<x<π