Aufgabe 8.1.

Seien $f(x)=\sqrt{x}, dom(f)=(0,5)$ und $g(x)=x^2-4, dom(g)=(0,3)$. Man bestimme $dom(f\cdot g)$.

Lösung:

Es ist $dom(f\cdot g)=dom(f(g(x)))$, also muss die folgende Doppelungleichung erfüllt sein:

$0<x^2-4<5$

$4<x^2<9$

$2<x<3$

Für den Definitionsbereich ist dann $dom(f\cdot g)=(2,3)$.

Aufgabe 8.2.

Man gebe jeweils eine unendliche Teilmenge von R an,

i. in der jeder Punkt ein Häufungspunkt ist,
ii. die keinen Häufungspunkt hat,
iii. die nur aus isolierten Punkten besteht, aber einen Häufungspunkt hat.

Lösung:

i. $A:=\bigcup\limits_{x\in R} x$
ii. $B:=\bigcup\limits_{x\in N} x$
iii. $C:=\frac{1}{x}, x\in N$ (Häufungspunkt ist 0)

Aufgabe 8.3.

Man bestimme die Menge aller Häufungspunkte von

i. $A:=\bigcup_{n\in N}\left(\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right)$,
ii. $B:=\left\{x\in R: x=n+\frac{1}{m}, n,m\in N\right\}$.

Lösung:

i. Die Häufungspunkte sind der Intervall [0,2].
ii. Der Häufungspunkt ist n.

<u>Aufgabe 8.4.</u>

Seien $f(x) := \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6}, dom(f) = R / \{3\}$ und $g(x) := \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}, dom(g) = \overline{R_+}, \overline{R_+} = \{x \in R : x \geq 0\}$.

Man beweise:

1. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$,
2. $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \frac{1}{2}$.

Lösung:

<u>Hinweis:</u> Ich forme die Funktionen derart um, dass sie äquivalent zur Ursprungsgleichung sind, jedoch der neue *domain* auch die nicht-definierten Stelle enthält und somit sich der Grenzwert dort berechnen lässt.

1. Die binomische Ergänzung liefert:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x - 6} &= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9 + 2x - 6}{2(x - 3)} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)^2 + 2(x-3)}{2(x-3)} \\ &= \lim_{x \to 3} \left(\frac{(x-3)}{2} + 1 \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

2. Erneut kommt die zweite binomische Formel zum Zuge:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} &= \lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 8.5.

Man berechne die folgenden Grenzwerte:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$,
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}, a\in R, n\in N$,
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Lösung:

1. Es ergibt sich (Satz von de l'Hospital):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'}{1}\\ &= \lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Wenn man diesen Satz nicht verwenden möchte, aus welchen Gründen auch immer, so kann man die binomischen Formeln anwenden und erhält:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-x^2\right)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

2. Nach dem Satz von de l'Hospital ist:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}}{1}$$
$$=na^{n-1}$$

Alternativ kann man auch ermitteln:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}\right)$$
$$=\lim_{x\to a}\left(a^{n-1}+a^{n-2}a+a^{n-3}a^2+\ldots+aa^{n-2}+a^{n-1}\right)$$
$$=na^{n-1}$$

3. Die binomische Ergänzung liefert:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{3}{2}$$