Aufgabe 9.1.

Zeigen Sie, dass:

Aufgabe 9.1.1.

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

Lösung:

Es ist $a^0 = e^{0\cdot\ln a} = e^0$. Die Definition der Funktion e^x erlaubt:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned} e^0 &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} 1^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.1.2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Lösung:

Aus $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mit $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\ bzw. \pm\infty$

und *f*(x) und *g*(x) differenzierbar in *U*(*a*) sowie *g*'(x)≠0 (Satz von de l'Hospital) folgt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 0}{1} = 1$$

Aufgabe 9.1.3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^p}{x^\alpha} = 0,\ p > 0, \alpha > 0$$

Lösung:

Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon > 0$, so dass $\ln x \le C_\varepsilon x^\varepsilon$ für $x \ge 1$, da jede Potenz schneller wächst als der Logarithmus. Wählt man ein ε derart, dass $p\varepsilon < \alpha$ gilt, so kann man abschätzen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^p}{x^\alpha} \le C_\varepsilon \frac{x^{p\varepsilon}}{x^\alpha} = C_\varepsilon \frac{1}{x^{\alpha - p\varepsilon}} \text{ für } x \ge 1$$

Aufgabe 9.1.4.

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} x = 0 \text{ für } x > 0$$

Für negative Werte von *x* muss $\lim_{x\to 0}(-x)$ betrachtet werden, was allerdings auch den Grenzwert 0 hat.

Aufgabe 9.1.5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, r \in Q_+$$

Lösung:

Die Idee gleicht derjenigen aus Aufgabe 9.1.2.:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{r(1+x)^{r-1}}{1} = r$$

Aufgabe 9.1.6.

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\ln x} = \lim_{x\to\infty} e^0 = 1$$

da $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Anschaulich heißt das, dass die *x*-te Wurzel schneller gegen 1 als der Logarithmus gegen ∞ strebt.

Aufgabe 9.2.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

Hinweis: Ohne jetzt explizit darauf hinzuweisen, beziehe ich mich stets auf den Satz von de l'Hospital.

Aufgabe 9.2.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}, a \in R$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax}}{1} = ae^0 = a$$

Aufgabe 9.2.2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2 x}{1} = 1 + \lim_{x \to 0} \tan^2 x = 1$$

Aufgabe 9.2.3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

Aufgabe 9.2.4.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos x)^n}{x}, n \in N$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos x)^n}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{n(\cos x)^{n-1}(-\sin x)}{1} = 0$$

Aufgabe 9.2.5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = e^0 = 1$$

Aufgabe 9.2.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} z &= \sin(\sin x) \\ z' &= \cos(\sin x)\cdot\cos x \\ f(x) &= \sin z \\ f'(x) &= z'\cdot\cos z \\ &= \cos(\sin x)\cdot\cos x\cdot\cos(\sin(\sin x)) \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos(\sin(\sin x))}{1} = 1$$

Aufgabe 9.2.7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0$$

Aufgabe 9.3.

Man zeige, dass die Funktion $f(x) := \sqrt{x^2+c}, c > 0, x \in R$ stetig ist.

Lösung:

Die Stetigkeit ist durch $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ definiert. Für die gegebene Funktion ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \sqrt{x^2+c} - \sqrt{x_0^2+c} \\ &= \frac{(x^2+c)-(x_0^2+c)}{\sqrt{x^2+c}\sqrt{x_0^2+c}} \\ &= \frac{x^2-x_0^2}{\sqrt{x^2+c}\sqrt{x_0^2+c}} \end{aligned}$$

Die Abschätzung $|f(x) - f(x_0)| \le \frac{1}{c}|x^2 - x_0^2|$ zeigt die Stetigkeit.

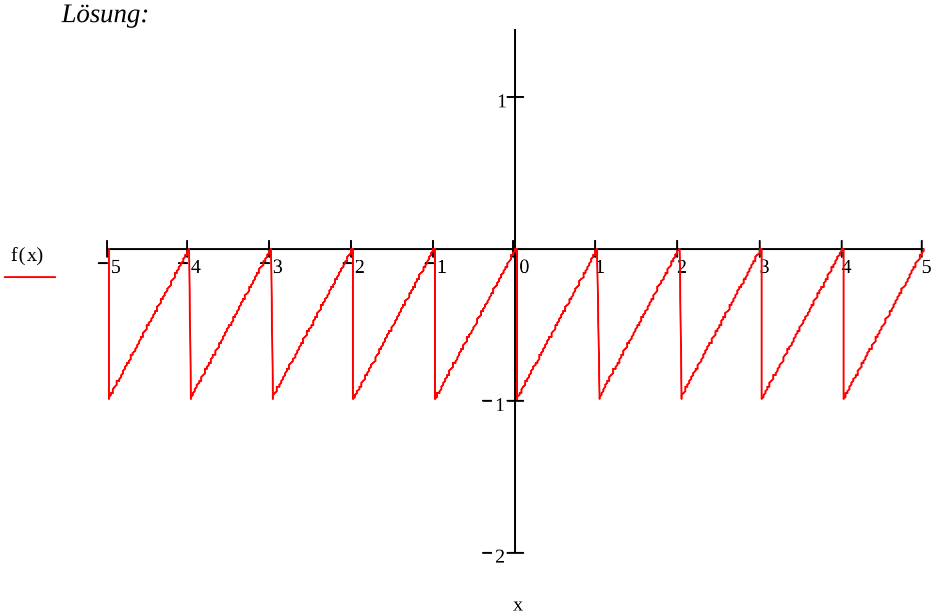
Aufgabe 9.4.

Es sei $[x] := \max\{k \in Z : k \leq x\}$ und $f(x) := x - [x], x \in R$.

Aufgabe 9.4.1.

Man skizziere *f*.

Lösung:



(leider ist die zur Diagrammerstellung verwendete Software nicht in der Lage, die Sprünge von 0 auf –1 korrekt darzustellen, die senkrechten roten Linien sind daher mathematisch falsch)

Aufgabe 9.4.2.

Man zeige, dass an jedem Punkt $x_0 \in R$ der links- und rechtsseitige Grenzwert von *f* existiert.

Lösung:

a) linksseitig: $x<x_0$:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in R/Z \\ 1 & x_0 \in Z \end{cases}$$

b) rechtsseitig: $x<x_0$:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \begin{cases} f(x_0) & x_0 \in R/Z \\ 0 & x_0 \in Z \end{cases}$$

Aufgabe 9.4.3.

An welchen Punkten ist *f* stetig und an welchen unstetig ?

Lösung:

Betrachtet man Aufgabe 9.4.2., so erkennt man, dass nur für $x \in Z$ die Funktion „springt", d.h. unstetig ist.

Aufgabe 9.5.

Man zeige, dass die Funktion $f(x) := \frac{1}{x^2 + 2x + 2}, x \in R$ gleichmäßig stetig ist und die Funktion $g(x) := x^2 + 2x + 2, x \in R$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Lösung:

fehlt

Aufgabe 9.6.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

Aufgabe 9.6.1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Lösung:

Wiederum der Satz aus 9.1.2.:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(-\left(1 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} \right)'}{1} \\
&= \lim_{x \to 0} -\frac{1}{2}\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{x\sqrt{x^{-2} - 1}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.6.2.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}, a\in R, n\in N$$

Lösung:

Gemäß dem Satz aus 9.1.2.:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}}{1}$$
$$=na^{n-1}$$

Aufgabe 9.6.3.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\right)$$

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2+5}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+6}{x+x}$$
$$=\frac{3}{2}$$