Aufgabe 9.1.

Zeigen Sie, dass:

Aufgabe 9.1.1.

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1$$

Lösung:

Es ist $a^0 = e^{0 \cdot \ln a} = e^0$. Die Definition der Funktion e^x erlaubt:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\begin{aligned} e^0 &= \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \to \infty} 1^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.1.2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Lösung:

Aus $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mit $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \; bzw. \pm\infty$

und f(x) und g(x) differenzierbar in $U(a)$ sowie g'(x)≠0 (Satz von de l'Hospital) folgt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos 0}{1} = 1$$

Aufgabe 9.1.3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)^p}{x^\alpha} = 0, p > 0, \alpha > 0$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln x)^p}{x^\alpha} =$$

Aufgabe 9.1.4.

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} \le \lim_{x\to 0} x = 0$$

Aufgabe 9.1.5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, r \in Q_+$$

Lösung:

Die Idee gleicht derjenigen aus Aufgabe 9.1.2.:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{r(1+x)^{r-1}}{1} = r$$

Aufgabe 9.1.6.

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

Lösung:

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\ln x} = \lim_{x\to\infty} e^0 = 1$$

da $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Anschaulich heißt das, dass die x-te Wurzel schneller gegen 1 als der Logarithmus gegen ∞ strebt.

Aufgabe 9.2.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

Hinweis: Ohne jetzt explizit darauf hinzuweisen, beziehe ich mich stets auf den Satz von de l'Hospital.

Aufgabe 9.2.1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x}, a \in R$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax}}{1} = ae^0 = a$$

Aufgabe 9.2.2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan^2 x}{1} = 1 + \lim_{x \to 0} \tan^2 x = 1$$

Aufgabe 9.2.3.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = 0$$

Aufgabe 9.2.4.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos x)^n}{x}, n \in N$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos x)^n}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{n (\cos x)^{n-1}}{1} = n$$

Aufgabe 9.2.5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Lösung:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = e^0 = 1$$

Aufgabe 9.2.6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
z &= \sin(\sin x)\\
z' &= \cos(\sin x)\cdot\cos x\\
f(x) &= \sin z\\
f'(x) &= z'\cdot\cos z\\
&= \cos(\sin x)\cdot\cos x\cdot\cos(\sin(\sin x))
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(\sin x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos(\sin(\sin x))}{1} = 1$$

Aufgabe 9.2.7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

Lösung:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0$$

Aufgabe 9.3.

Man zeige, dass die Funktion $f(x) := \sqrt{x^2 + c}, c > 0, x \in R$ stetig ist.

Lösung:

Es ist für $x > x_0$ (ggf. vertausche man x und x_0):

$$
\begin{aligned}
\left| f(x) - f(x_0) \right| &= \left| \sqrt{x^2 + c} - \sqrt{x_0^2 + c} \right| \\
&= \frac{\left| \sqrt{x^2 + c} - \sqrt{x_0^2 + c} \right| \left(\sqrt{x^2 + c} + \sqrt{x_0^2 + c} \right)}{\sqrt{x^2 + c} + \sqrt{x_0^2 + c}} \\
&= \frac{\left| x^2 + c - \left(x_0^2 + c \right) \right|}{\sqrt{x^2 + c} + \sqrt{x_0^2 + c}} \\
&= \frac{\left| x^2 - x_0^2 \right|}{\sqrt{x^2 + c} + \sqrt{x_0^2 + c}} \\
&= \frac{\left| (x - x_0)(x + x_0) \right|}{\sqrt{x^2 + c} + \sqrt{x_0^2 + c}} \\
&= \left| x - x_0 \right| \frac{\left| x + x_0 \right|}{\sqrt{x^2 + c} + \sqrt{x_0^2 + c}} \\
&< \left| x - x_0 \right| \frac{2|x|}{2\sqrt{x_0^2 + c}} \\
&= \left| x - x_0 \right| \frac{|x|}{\sqrt{x_0^2 + c}} \\
&< \left| x - x_0 \right| \left| \frac{x}{x_0} \right| \\
&< \left| x - x_0 \right| = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Somit ist für $\delta = \varepsilon$ die Bedingung erfüllt.

Aufgabe 9.4.

Es sei $[x] := \max\{k \in Z : k \leq x\}$ und $f(x) := x - [x], x \in R$.

Aufgabe 9.4.1.

Man skizziere f.

Lösung:

<u>Aufgabe 9.4.2.</u>

Man zeige, dass an jedem Punkt $x_0 \in R$ der links- und rechtsseitige Grenzwert von f existiert.

Lösung:

a) linksseitig: $x<x_0$

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0-} (x - [x])$$

b) rechtsseitig: $x<x_0$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0+} (x - [x])$$

<u>Aufgabe 9.4.3.</u>

An welchen Punkten ist f stetig und an welchen unstetig ?

Lösung:

<u>Aufgabe 9.5.</u>

Man zeige, dass die Funktion $f(x) := \dfrac{1}{x^2+2x+2}, x \in R$ gleichmäßig stetig ist und die Funktion $g(x) := x^2 + 2x + 2, x \in R$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Lösung:

Die gleichmäßige Stetigkeit beruht auf der Aussage:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$$

Aufgabe 9.6.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

Aufgabe 9.6.1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Lösung:

Wiederum der Satz aus 9.1.2.:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'}{1}\\ &= \lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2x\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 9.6.2.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}, a\in R, n\in N$$

Lösung:

Gemäß dem Satz aus 9.1.2.:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{nx^{n-1}}{1}\\ &= na^{n-1}\end{aligned}$$

<u>Aufgabe 9.6.3.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\right)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+5}\right)\left(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5}\right)}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2+5}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+5}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x+6}{x+x} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$