A U F G A B E N "A N A L Y S I S"

13. Vorlesung

13.1 Finden Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung, die die Funktion $f(x) = xe^{-x^2}$, $x > 0$, als eine Lösung hat.

13.2 Finden Sie die Riemann-Zwischensumme $ZS(Z_n, f)$ für jedes $n = 1, 2, \dots$, $f(x) = 1 + x$ und $[a, b] = [-1, 4]$, wenn Sie eine äquidistante Zerlegung $\{I_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, $I_k^{(n)} = [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ von $[-1, 4]$ annehmen und den Zwischenwert $\xi_k^{(n)}$ gleich $\xi_k^{(n)} = \frac{x_{k-1}^{(n)} + x_k^{(n)}}{2}$ setzen.

12.3 Finden Sie die Riemann-Untersumme $US(Z_n, f)$ und Riemann-Obersumme $OS(Z_n, f)$ für jedes $n = 1, 2, \dots$ und die folgenden Funktionen:

13.2.1 $f(x) = x^2$, $[a, b] = [-2, 3]$,

13.2.2 $f(x) = \sqrt{x}$, $[a, b] = [0, 1]$,

13.2.3 $f(x) = 2^x$, $[a, b] = [0, 10]$,

wenn Sie eine äquidistante Zerlegung annehmen.

13.4 Finden Sie die Riemann-Untersumme $US(Z_n, f)$ für jedes $n = 1, 2, \dots$, $f(x) = x^4$ und $[a, b] = [1, 2]$, wenn Sie eine geometrische Zerlegung $\{I_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, $I_k^n = [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ von $[1, 2]$ annehmen, d.h., $\frac{x_k^{(n)}}{x_{k-1}^{(n)}} = q_n > 1$ für jedes $k = 1, 2, \dots, n$.

13.5 Berechnen Sie die folgenden bestimmeten Integrale mit Hilfe der Riemann-Integralsummen (Riemann-Zwischensumme, Riemann-Untersumme, Riemann-Obersumme):

13.5.1 $\int_1^1 x^2\, dx$,

13.5.2 $\int_0^1 a^x\, dx$, $a > 0$,

13.5.3 $\int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx$, $0 < a < b$,

13.5.4 $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx$,

13.5.5 $\int_0^x \cos(t)\, dt$, $x > 0$.

Wählen Sie eine günstige Zerlegung des Integrationsintervalls! Hinweis: Setzen in Aufgabe 13.5.3 den Zwischenwert $\xi_k^{(n)} = \sqrt{x_k^{(n)} x_{k-1}^{(n)}}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

13.5.6 Zeigen Sie, daß die Riemannsche Funktion

$$r(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{p} & : \quad x = \frac{p}{q} \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{1}$$

wobei p and q teilerfremd sind, integrierbar ist,

13.5.7 Zeigen Sie, daß für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & : \quad x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{2}$$

das Integral $\int_0^1 |f|$ existiert, jedoch das Integral $\int_0^1 f$ nicht existiert.