A U F G A B E N "A N A L Y S I S"

17. Vorlesung

17.1 Sei V ein linearer Raum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Die Vektoren x_1 und x_2 seien linear unabhängig. Ferner sei

$$U_j := \{x : x \in V, \text{ es existiert } \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } x = \lambda x_j\}, \quad j = 1, 2. \tag{1}$$

Man zeige: U_1, U_2 sind Teilräume, $U_1 \cup U_2$ ist kein Teilraum.

17.2 Seien U_1 und U_2 Teilräume eines linearen Raumes V. Man zeige:

$$U_1 \cup U_2 \text{ Teilraum} \iff U_1 \subseteq U_2 \text{ oder } U_2 \subseteq U_1. \tag{2}$$

17.3 Sei $V(\mathbb{R})$ der lineare Raum der auf $\mathbb{R}$ definierten Funktion. Seien

$$G := \{f \in V(\mathbb{R}) : f(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}\} \tag{3}$$
$$U := \{f \in V(\mathbb{R}) : f(x) = -f(-x), \quad x \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

die Mengen der geraden und ungeraden Funktionen auf $\mathbb{R}$.

17.3.1 Man gebe Beispiele an für eine gerade, eine ungerade und eine "weder-noch"-Funktion.

17.3.2 Man zeige, daß G und U Teilräume von $V(\mathbb{R})$ sind.

17.3.2 Man zeige $V(\mathbb{R}) = G \oplus U$, d.h. $G \cap U = \{0\}$.

17.4 Sei

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3. \tag{5}$$

Man bestimme $M^\perp$ und $M^{\perp\perp}$.

17.5 Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

17.5.1 Es sei V eine linearer Raum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$, $y_0 \in V$. $T; V \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(x) = (x, y_0)$.

17.5.2 $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(t) =< e^t, t >$.

17.5.3 $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(< x_1, x_2 >) =< x_1 x_2, x_2 >$.

17.5.4 Sei $C^2(\mathbb{R}) := \{f : f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ zweimal stetig differenzierbar}\}$ und seien $a, b \in \mathbb{R}$,

$$T : C^2(\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(\mathbb{R}), \quad T(f) = f'' + af' + bf. \tag{6}$$

17.6 Seien V_1,V_2,V_3 lineare Räume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, T linear Abbildung von V_1 nach V_2, S lineare Abbildung von V_2 nach V_3. Man zeige: Sind T und S invertierbar, dann auch ST, und $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.