A U F G A B E N "A N A L Y S I S"

11. Vorlesung

11.1 Zeigen Sie, mit Hilfe der "ϵ-δ"-Sprache, daß die Funktion $\sqrt{x}$, $x \geq 0$, stetig bei $x_0 = 5$ ist.

Lösung: Es sei

$$|\sqrt{x} - \sqrt{5}| < \epsilon. \tag{1}$$

Daraus folgt

$$\sqrt{5} - \epsilon < \sqrt{x} < \sqrt{5} + \epsilon \tag{2}$$

oder

$$5 - 2\epsilon\sqrt{5} + \epsilon^2 < x < 5 + 2\epsilon\sqrt{5} + \epsilon^2. \tag{3}$$

Folglich gilt

$$-\epsilon(2\sqrt{5} - \epsilon) < x - 5 < \epsilon(2\sqrt{5} + \epsilon). \tag{4}$$

Für $\epsilon < 2\sqrt{5}$ setzen wir $\delta(\epsilon) = \epsilon(2\sqrt{5} - \epsilon)$. Somit gilt für alle x, die der Bedingung $|x - 5| < \delta(\epsilon)$ genügen, daß $|\sqrt{x} - \sqrt{5}| < \epsilon$, $0 < \epsilon < 2\sqrt{5}$. Ist $\epsilon \geq 2\sqrt{5}$, so setzen wir $\delta(\epsilon) = 5$, woraus für $|x - 5| < 5$ die Ungleichung $|\sqrt{x} - \sqrt{5}| < \sqrt{5} < 2\sqrt{5} \leq \epsilon$ folgt. □

11.2 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

11.2.1 $f(x) = |x|$, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$,

Lösung: Die Funktion ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig. Der Beweis dieser Behauptung folgt aus Aufgabe 11.4. □

11.2.2
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2, \end{cases}$$
$a \in \mathbb{R}$.

Lösung: Für $x \neq 2$ ist die Behauptung offensichtlich. Die Funktion $f(x)$ ist im Punkt $x = 2$ stetig, wenn $\lim_{x\to 2} f(x) = a$. Es gilt

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4. \tag{5}$$

Daraus folgt, daß die Funktion stetig ist, falls $a = 4$, und unstetig, falls $a \neq 4$. □

11.2.3
$$f(x) = \begin{cases} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Lösung: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion offensichtlich stetig. Kritisch ist der Punkt $x = 0$. Infolge von Aufgabe 9.1.2 gilt $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Daraus folgt, daß die Funktion $f(x)$ steitg ist. □

11.2.4 $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases},$$

Lösung: Wie in der Aufgabe 11.2.3 ist ebenfalls der Punkt $x = 0$ kritsch. Es gilt die Darstellung

$$f(x) = \operatorname{sign}(x)\frac{\sin(x)}{x}, \quad x \neq 0, \tag{6}$$

wobei

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Unter Berücksichtigung von Aufgabe 9.1.2 folgt daraus $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -1$ und $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$. Folglich ist die Funktion unstetig. □

11.2.5 $$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases},$$

$a \in \mathbb{R}$,

Lösung: Kritisch ist der Punkt $x = 0$. Wir führen die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $x_k = \frac{1}{\alpha+2k\pi}$, $\alpha \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$. Offensichtlich gilt $\lim_{k\to\pm\infty} x_k = 0$ und $\lim_{k\to\pm\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\pm\infty} \sin(\alpha + 2k\pi) = \lim_{k\to\pm\infty} \sin(\alpha)$. Daraus folgt, daß der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert und folglich kein a existiert, so daß die Funktion stetig bei $x = 0$ ist. □

11.3 Finden Sie die Unstetigkeitsstellen der folgenden Funktionen:

11.3.1 $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$,

Lösung: Die Funktion ist unstetig bei $x = -1$. □

11.3.2 $f(x) = \frac{1+x}{1+x^3}$, $x \in \mathbb{R}$,

Lösung: Die Funktion hat eine hebbare Unstetigkeit bei $x = -1$.

Beweis: Der Nenner wird Null bei $x^3 + 1 = 0$. Verwenden wir die Formel

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

so finden wir die Nullstelle $x_1 = -1$. Da gilt $x^2 - x + 1 = (x - \frac{1}{2}x)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, ist x_1 die einzige Nullstelle des Nenners. Untersuchen wir, ob die Funktion $f(x)$ tatsächlich unstetig bei x_1 ist, oder ob die Funktion bei x_1 eine hebbare Unstetigkeit hat. Wir finden

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}. \tag{9}$$

Setzen wir $f(-1) = \frac{1}{3}$, so wird die Funktion stetig. Die Unstetigkeit ist eine hebbare. □

11.3.3 $f(x) = \arctan(1/x)$, $x \in \mathbb{R}$,

Lösung: Die Funktion ist unstetig bei $x = 0$

Beweis: Kritisch ist die Stelle $x = 0$. Wir finden $\lim_{x\to 0, x<0} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ and $\lim_{x\to 0, x>0} f(x) = \frac{\pi}{2}$. Die Funktion ist damit bei 0 unstetig und die Unstetigkeit ist nicht hebbar. □

11.3.4 $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Lösung: Die Funktion ist in den drei Nulstellen des Nenners unstetig.

Beweis: Der Zähler ist bei $x = \pm 1$ null, während der Nenner bei $x = \pm 1$ ungleich Null ist. Damit ist die Funktion unstetig bei den Nullstellen des Nenners. Eine eifache Analyse zeigt, daß der Nenner drei Nullstellen hat. □

11.4 Es sei f, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$, eine stetige Funktion. Zeigen Sie, daß auch $F(x) := |f(x)|$, $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{R}$, eine stetige Funktion ist.

Lösung: Da $f(x)$ stetig gilt, daß für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta(x_0)$ existiert, so daß für $|x - x_0| < \delta(x_0)$ die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ erfüllt ist. Da gilt

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| \tag{10}$$

folgt daraus, daß für $|x - x_0| < \delta(x_0)$ auch die Ungleichung $||f(x)| - |f(x_0|| = |F(x) - F(x_0)| < \epsilon$ besteht. □

11.5 Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen gleichmäßig stetig sind:

11.5.1 $f(x) = \frac{x}{4-x^2}$, $\mathrm{dom}(f) = [-1, 1]$,

Lösung: Die Funktion ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Die Funktion f ist stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$. Wenden wir den Satz über die gleichmäßige Stetigkeit von stetigen Fuktionen an, so folgt sofort die gleichmäßige Stetigkeit. □

11.5.2 $f(x) = \ln(x)$, $\mathrm{dom}(f) = (0, 1)$,

Lösung: Die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir nehmen an, daß die Funktion $f(x)$ gleichmäßig stetig in $\mathrm{dom}(f) = (0, 1)$ ist, d.h., für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für $x, y \in (0, 1)$ und $|x - y| < \delta$, die Abschätzung $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ gilt. Wir setzen $x_n := \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}$ und

$y_n := \frac{1}{n}$ $n = 1, 2 \ldots$. Da $|x_n - y_n| = \frac{\delta}{2} < \delta$, gilt offensichtlich $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$, $n = 1, 2, \ldots$. Daraus folgt $\ln(x_n) - \ln(y_n) = \ln(x_n/y_n) < \epsilon$, was äquivalent zu $\frac{x_n}{y_n} < e^\epsilon$ ist. Folglich finden wir $x_n - y_n < (e^\epsilon - 1)y_n$, $n = 1, 2 \ldots$, oder $\delta < (e^\epsilon - 1)\frac{2}{n}$, $n = 1, 2 \ldots$. Daraus folgt $\delta = 0$, was im Widerspruch zur Annahme $\delta > 0$ steht. $\square$

11.5.3 $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $\mathrm{dom}(f) = (0, \pi)$,

Lösung: Die Funktion ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir definieren die Funktion $\tilde{f}$, $\mathrm{dom}(\tilde{f}) = [0, \pi]$:

$$\tilde{f} := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ f(x) & x \in (0, 1) \\ 0 & x = \pi \end{cases} \tag{11}$$

Die Funktion ist stetig auf $[0, \pi]$. Wenden wir den Satz über die gleichmäßige Stetigkeit stetiger Funktionen an, so folgt, daß die Funktion $\tilde{f}$ gleichmäßig stetig in $[0, 1]$ ist. Damit ist aber auch die Funktion f, die eine Einschränkung der Funktion $\tilde{f}$ ist, d.h. $f = \tilde{f}|(0, 1)$, gleichmäßig stetig. $\square$

11.5.4 $f(x) = e^x \cos(1/x)$, $\mathrm{dom}(f) = (0, 1)$,

Lösung: Die Funktion ist nicht gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir setzen $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$. Es gilt

$$\begin{aligned} &f(x_n) - f(x_{n+1}) = \\ &\quad e^{1/n\pi} \cos(n\pi) - e^{1/(n+1)\pi} \cos((n+1)\pi) = \\ &\quad e^{1/n\pi}(-1)^n - e^{1/(n+1)\pi}(-1)^{(n+1)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Daraus folgt

$$|f(x_n) - f(x_{n+1})| = e^{1/n\pi} + e^{1/(n+1)\pi} > 2, \qquad l = 1, 2 \ldots. \tag{13}$$

Andererseits gilt $|x_n - x_{n+1}| \leq \frac{1}{n(n+1)\pi}$. Angenommen die Funktion f sei gleichmäßig stetig. Dann existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß für $x, y \in (0, 1)$ und $|x - y| < \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ besteht. Wir wählen $0 < \epsilon < 2$. Wenn n hinreichend groß ist, dann gilt $|x_n - x_{n+1}| < \delta$. Aus (**??**) folgt aber, daß die Abschätzung $|f(x_n) - f(x_{n+1})| < \epsilon$ nicht gilt. Damit war die Annahme, daß f gleichmäßig ist, falsch. $\square$

11.5.5 $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Lösung: Die Funktion ist gleichmäßig stetig.

Beweis: Es ist unschwer zu zeigen, daß aus $x, y \geq \delta$ und $|x - y| < \delta^2$ folgt, daß $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \delta$. Folglich finden wir

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \left\{ \begin{array}{cl} \sqrt{\delta} & 0 \leq x, y < \delta,\ |x - y| < \delta^2 \\ \sqrt{\delta} + \delta & 0 \leq x < \delta \leq y,\ |x - y| < \delta^2 \\ \delta & \delta \leq x, y,\ |x - y| < \delta^2. \end{array} \right. \tag{14}$$

Für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein δ, $0 < \delta \leq 1$, so daß die Bedingung $\max\{\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta} + \delta, \delta\} < \epsilon$ erfüllt ist. Für $x, y \geq 0$ und $|x - y| < \delta^2$ gilt folglich die Abschätzung $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \max\{\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta} + \delta, \delta\} < \epsilon$. $\square$