A U F G A B E N "A N A L Y S I S"

13. Vorlesung

13.1 Finden Sie eine Differentialgleichung 1. Ordnung, die die Funktion $f(x) = xe^{-x^2}$, $x > 0$, als eine Lösung hat.

Lösung: Es gilt

$$\frac{d}{dx} f(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} = \left(\frac{1}{x} - 2x\right) xe^{-x^2} = \left(\frac{1}{x} - 2x\right) f(x). \tag{1}$$

Damit erfüllt die Funktion $f(x)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left(\frac{1}{x} - 2x\right) f(x). \tag{2}$$

13.2 Finden Sie die Riemann-Zwischensumme $ZS(Z_n, f)$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$, $f(x) = 1 + x$ und $[a, b] = [-1, 4]$, wenn Sie eine äquidistante Zerlegung $\{I_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, $I_k^{(n)} = [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ von $[-1, 4]$ annehmen und den Zwischenwert $\xi_k^{(n)}$ gleich $\xi_k^{(n)} = \frac{x_{k-1}^{(n)} + x_k^{(n)}}{2}$ setzen.

Lösung: Die äquidistante Zerlegung ist gegeben durch

$$x_k^{(n)} = -1 + \frac{5k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Damit erhalten wir für die Zwischensumme

$$ZS(Z_n, f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k^{(n)})(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) = \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{x_{k-1}^{(n)} + x_k^{(n)}}{2}\right)(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}). \tag{4}$$

Setzt man ein, so folgt

$$ZS(Z_n, f) = \sum_{k=1}^n \frac{25}{2n^2}(2k - 1) = \frac{25}{n^2}\sum_{k=1}^n k - \frac{25}{2n^2}\sum_{k=1}^n 1. \tag{5}$$

Verwenden wir die Summenformel

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{6}$$

so erhalten wir

$$ZS(Z_n, f) = \frac{25}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{25}{2n^2}n = \frac{25n}{2n} - \frac{25}{2n} = \frac{25}{2}. \tag{7}$$

12.3 Finden Sie die Riemann-Untersumme $US(Z_n, f)$ und Riemann-Obersumme $OS(Z_n, f)$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ und die folgenden Funktionen:

13.2.1 $f(x) = x^2, \quad [a,b] = [-2,3],$

Lösung: Wir wählen die äquidistante Zerlegung

$$x_k^{(n)} = -2 + \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, 5n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Wir finden

$$US(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{2n} (x_k^{(n)})^2 \frac{1}{n} + \sum_{k=2n+1}^{4n} (x_{k-1}^{(n)})^2 \frac{1}{n} + \sum_{k=4n+1}^{5n} (x_{k-1}^{(n)})^2 \frac{1}{n} \tag{9}$$

Dies ergibt

$$US(Z_n, f) = \tag{10}$$
$$\frac{1}{n}\left\{\sum_{k=1}^{2n}\left(-2+\frac{k}{n}\right)^2 + \sum_{k=2n+1}^{4n}\left(-2+\frac{k-1}{n}\right)^2 + \sum_{k=4n+1}^{4n}\left(-2+\frac{k-1}{n}\right)^2\right\}$$

oder

$$US(Z_n, f) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{m=1}^{2n-1}\left(-2+\frac{2n-m}{n}\right)^2 + \right. \tag{11}$$
$$\left. \sum_{m=0}^{2n-1}\left(-2+\frac{2n+1+m-1}{n}\right)^2 + \sum_{m=0}^{n-1}\left(-2+\frac{4n+1+m-1}{n}\right)^2\right\}.$$

Daraus folgt

$$US(Z_n, f) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{m=1}^{2n-1}\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \sum_{m=1}^{2n-1}\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \sum_{m=0}^{n-1}\left(2+\frac{m}{n}\right)^2\right\} \tag{12}$$

oder

$$US(Z_n, f) = \frac{1}{n}\left\{2\sum_{m=1}^{2n-1}\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \sum_{m=0}^{n-1}\left(2+\frac{m}{n}\right)^2\right\}. \tag{13}$$

oder

$$US(Z_n, f) = \frac{1}{n^3}\left\{2\sum_{m=1}^{2n-1} m^2 + \sum_{m=0}^{n-1}(2n+m)^2\right\}. \tag{14}$$

Es gelten Die Summenformeln

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{16}$$

Folglich gilt

$$US(Z_n, f) = \tag{17}$$
$$\frac{1}{n^3}\left\{2\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} + 4n^3 + \right.$$
$$\left. 4n\frac{(n-1)n}{2} + \frac{((n-1)n(2n-1)}{6}\right\}.$$

oder

$$US(Z_n, f) = \tag{18}$$
$$\frac{1}{n^2}\left\{2\frac{(2n-1)(4n-1)}{3} + 4n^2 + 2(n-1)n + \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right\}. \tag{19}$$

Wir finden

$$US(Z_n, f) = \frac{70n^2 - 39n + 5}{6n^2}, \tag{20}$$

woraus $\lim_{n\to\infty} US(Z_n, f) = \frac{35}{2}$ folgt. Auf ähnliche Weise wird $OS(Z_n, f)$ berechnet. □

13.2.2 $\quad f(x) = \sqrt{x}, \quad [a, b] = [0, 1],$

Lösung: Wir wählen die äquidistante Zerlegung $x_k^{(n)} = \frac{k}{n}$. Folglich gilt

$$US(Z_n, f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}. \tag{21}$$

Für die Obersumme finden wir

$$OS(Z_n, f) = \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}. \tag{22}$$

Leider gibt es keine geschlossene Summenformel! □

13.2.3 $\quad f(x) = 2^x, \quad [a, b] = [0, 10],$

Lösung: Wir wählen die äquidistante Zerlegung $x_k^{(n)} = \frac{10k}{n}$. Es gilt

$$US(Z_n, f) = \frac{10}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 2^{10k/n} = \frac{10}{n}\frac{2^{10}-1}{2^{10/n}-1} \tag{23}$$

Ähnlich wird die Obersumme berechnet. □

13.4 Finden Sie die Riemann-Untersumme $US(Z_n, f)$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$, $f(x) = x^4$ und $[a, b] = [1, 2]$, wenn Sie eine geometrische Zerlegung $\{I_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, $I_k^n = [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)})$ von $[1, 2]$ annehmen, d.h., $\frac{x_k^{(n)}}{x_{k-1}^{(n)}} = q_n > 1$ für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$.

Lösung: Man findet $x_k^{(n)} = q_n x_{k-1}^{(n)}$ woraus $x_k^{(n)} = q_n^k x_0^{(n)} = q_n^k$ folgt. Da $x_n^{(n)} = 2$ finden wir $q_n^n = 2$ oder $q_n = \sqrt[n]{2}$, d.h. $x_k^{(n)} = (2)^{k/n}$. Daraus folgt

$$US(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n}(x_{k-1}^n)^4(x_k^n - x_{k-1}^n). \tag{24}$$

Setzen wir ein, so erhalten wir

$$US(Z_n, f) = \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2)^{4(k-1)/n}((2)^{k/n} - (2)^{k-1)/n}) = ((2)^{1/n} - 1)\sum_{k=0}^{n-1} (2)^{5k/n}. \tag{26}$$

Das ist eine geometrische Reihe. Somit finden wir

$$US(Z_n, f) = ((2)^{1/n} - 1)\frac{(2)^5 - 1}{(2)^{5/n} - 1)} = \tag{27}$$

$$31\frac{(2)^{1/n} - 1}{(2)^{5/n} - 1)} = \frac{31}{(2)^{4/n} + (2)^{3/n} + (2)^{2/n} + (2)^{1/n} + 1}. \tag{28}$$

man sieht leicht, daß $\lim_{n\to\infty} US(Z_n, f) = \frac{31}{5}$. □

13.5 Berechnen Sie die folgenden bestimmeten Integrale mit Hilfe der Riemann-Integralsummen (Riemann-Zwischensumme, Riemann-Untersumme, Riemann-Obersumme):

13.5.1 $\int_0^1 x^2\,dx$,

Lösung: Es gilt

$$OS(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}, \tag{29}$$

woraus $\lim_{n\to\infty} OS(Z_n, f) = \frac{1}{3}$ folgt. □

13.5.2 $\int_0^1 a^x\,dx, \quad a > 0$,

Lösung: Wir finden

$$ZS(Z_n, f) = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k/n}\frac{1}{n}. \tag{30}$$

Das ist eine geometrische Reihe. Somit gilt

$$ZS(Z_n, f) = \frac{1}{n}\frac{a-1}{a^{1/n} - 1}, \tag{31}$$

woraus $\lim_{n\to\infty} ZS(Z_n, f) = \frac{a-1}{\ln(a)}$ folgt. □

13.5.3 $\int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx, \quad 0 < a < b$,

Lösung: Wir setzen $x_k := a + d\frac{k}{d}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $d = b - a$. Benutzen wir den Hinweis, so finden wir

$$ZS(Z_n, f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a + d\frac{k}{n})(a + d\frac{k-1}{n})}\frac{d}{n} = nd\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{na + kd}\frac{1}{na + (k-1)d}. \tag{32}$$

Daraus erhalten wir

$$ZS(Z_n, f) = \tag{33}$$
$$n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{na+(k-1)d} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{na+kd}\right) = n\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{na+d} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{na+kd}\right),$$

woraus augenblicklich folgt

$$ZS(Z_n, f) = n\left(\frac{1}{na} - \frac{1}{na+nd}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \tag{34}$$

Offensichtlich gilt $\lim_{n\to\infty} ZS(Z_n, f) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. □

13.5.4 $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx$,

Lösung: Es gilt

$$ZS(Z_n, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k\pi/2n)\frac{\pi}{2n}. \tag{35}$$

Wir benutzen die Beziehung $\sin(x) = \Im\mathrm{m}(e^{ix})$. So erhalten wir

$$ZS(Z_n, f) = \frac{\pi}{2n}\Im\mathrm{m}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\pi/2n}\right). \tag{36}$$

Das ist eine geometrische Reihe. Deshalb finden wir

$$ZS(Z_n, f) = \frac{\pi}{2n}\Im\mathrm{m}\left(\frac{e^{in\pi/2n}-1}{e^{i\pi/2n}-1}\right) \tag{37}$$

woraus folgt

$$ZS(Z_n, f) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4n}\frac{1}{\sin(\pi/4n)}\sin(\pi(1-\frac{1}{n})/4). \tag{38}$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\pi}{4n}\frac{1}{\sin(\pi/4n)}\sin(\pi(1-\frac{1}{n})/4) = 1$. □

13.5.5 $\int_0^{x} \cos(t)\,dt, \quad x > 0.$

Lösung: Wir verfahren wie zuvor.

$$ZS(Z_n, f) = \tag{39}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx/n)\frac{x}{n} = \frac{x}{n}\Re\mathrm{e}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx/n}\right) = \frac{x}{n}\Re\mathrm{e}\left(\frac{e^{ix}-1}{e^{ix/n}-1}\right).$$

Daraus erhalten wir

$$ZS(Z_n, f) = \frac{x}{n}\frac{1}{\sin(x/2n)}\sin(x/2)\cos(x(1-\frac{1}{n})/2) \tag{40}$$

Folglich gilt $\lim_{n\to\infty} ZS(Z_n, f) = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin(x)$. □

Wählen Sie eine günstige Zerlegung des Integrationsintervalls! Hinweis: Setzen in Aufgabe 13.5.3 den Zwischenwert $\xi_k^{(n)} = \sqrt{x_k^{(n)} x_{k-1}^{(n)}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

13.5.6 Zeigen Sie, daß die Riemannsche Funktion

$$r(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & : \quad x = \frac{p}{q} \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{41}$$

wobei p and q teilerfremd sind, integrierbar ist,

Lösung: Es sei $\epsilon > 0$ und $M_\epsilon := \{x \in [0,1] : r(x) \geq \epsilon\}$. Da $x \in [0,1]$, gilt für $x = p/q$, daß $0 < p \leq q$. Aus $x = p/q \in M_\epsilon$ folgt $q \leq 1/\epsilon$. Damit gilt für $x = p/q \in M_\epsilon$ die Relation $0 \leq p \leq q \leq 1/\epsilon$. Somit besteht die Menge M_ϵ aus endlichen vielen Punkten. Wir setzen

$$r_\epsilon(x) = \begin{cases} r(x) & : \quad x \in [0,1] \setminus M_\epsilon \\ 0 & : \quad x \in [0,1] \cap M_\epsilon, \end{cases} \tag{42}$$

Ferner setzen wir $d_\epsilon(x) := r(x) - r_\epsilon(x)$. Die Funktion ist offensichtlich nur für $x \in M_\epsilon$ verschieden von Null, d.h., die Funktion d_ϵ ist nur in endlichen vielen Punkten verschieden von Null. Es gilt

$$0 = \underline{\int_0^1} r \leq \overline{\int_0^1} r \leq \overline{\int_0^1} r_\epsilon + \overline{\int_0^1} d_\epsilon. \tag{43}$$

Da d_ϵ nur in endlich vielen Punkten verschieden von Null ist, findet man $\overline{\int_0^1} d_\epsilon = 0$. Weiterhin gilt $r_\epsilon(x) < \epsilon$, $x \in [0,1]$, was $\overline{\int_0^1} r_\epsilon \leq \epsilon$ impliziert. Somit erhalten wir

$$0 = \underline{\int_0^1} r \leq \overline{\int_0^1} r \leq \overline{\int_0^1} r_\epsilon + \overline{\int_0^1} d_\epsilon \leq \epsilon. \tag{44}$$

Da ϵ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $0 = \underline{\int_0^1} r = \overline{\int_0^1} r$. Folglich ist r integrierbar und $\int_0^1 r = 0$. $\square$

13.5.7 Zeigen Sie, daß für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ -1 & : \quad x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{45}$$

das Integral $\int_0^1 |f|$ existiert, jedoch das Integral $\int_0^1 f$ nicht existiert.

Lösung: Da $|f| = 1$ existiert das Integral $\int_0^1 |f| = 1$. Wir finden

$$-1 = \underline{\int_0^1} f < \overline{\int_0^1} f = 1. \tag{46}$$

Da $\underline{\int_0^1} f \neq \overline{\int_0^1} f$ existiert das Integral $\int_0^1 f$ nicht. $\square$