**Übungsaufgaben zur Vorlesung**
**Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik**

20.12.2000

1. Bei einem Messvorgang wird angenommen, dass er durch eine Zufallsgröße mit unbekanntem Erwartungswert $\mu$ und einer Standardabweichung $\sigma = 0.1$ beschrieben werden kann. Wie viele getrennte Messungen (ohne gegenseitige Beeinflussung) sind durchzuführen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.95 der Betrag der Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel und dem Erwartungswert kleiner als 0.02 (Maßeinheiten) ist? Man beantworte diese Frage mit der Tschebyschewschen Ungleichung.

2. Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit $\mathsf{E}X_1 = \mu, \quad \mathsf{E}X_1^2 = a$.
   - Berechnen Sie $\mathsf{E}\tilde{s}_n^2(X)$ für $X = (X_1, ..., X_n), \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und
   $$\tilde{s}_n^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$
   - Ist $\tilde{s}_n^2$ erwartungstreu für die Varianz von $X_1$?
   - Welche der beiden Schätzungen $s_n^2$ und $\tilde{s}_n^2$ hat den kleineren mittleren quadratischen Fehler?

3. $X_1, X_2$ seien unabhängige, auf $[0, \vartheta], \vartheta \in \mathbb{R}^1$ gleichverteilte Zufallsgrößen, wobei $\vartheta$ unbekannt ist.
   - Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $(X_1, X_2)$.
   - Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von $X_{\min} = \min(X_1, X_2)$ und $X_{\max} = \max(X_1, X_2)$.
   - Bestimmen Sie eine erwartungstreue Schätzung für $\vartheta$.

4. Es seien $X_1, X_2, X_3$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit $\mathsf{E}X_1 = \mu, \quad \mathsf{Var}\,X_1^2 = \sigma^2$.
   - Sind $\bar{X}_3$ und $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$ mit $\sum \alpha_i = 1$ erwartungstreue Schätzungen für $\mu$?
   - Gibt es unter diesen Schätzungen eine, die einen kleinsten mittleren quadratischen Fehler haben?